Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Dr. Philip Möller

Einführung in die Topologie, SoSe 25
Blatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte):

(i) Seien X, Y und Z topologische Räume und seien $f, f' \colon X \to Y$ und $g, g' \colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass falls f homotop zu f' und g homotop zu g' ist, auch $g \circ f$ homotop zu $g' \circ f'$ ist.

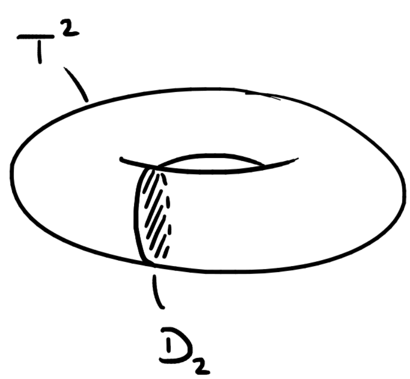
(ii) Seien X, X', Y und Y' topologische Räume und seien $f, g \colon X \to Y$ und $f', g' \colon X' \to Y'$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass falls f homotop zu g und f' homotop zu g' ist, auch die Produkte $f \times f', g \times g' \colon X \times X' \to Y \times Y'$ homotop zueinander sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Finden Sie eine surjektive Abbildung $f \colon S^n \to S^n$, welche nullhomotop, d.h. homotop zu einer konstanten Abbildung, ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K die Kleinsche Flasche, aufgefasst als Teilraum von $\mathbb{R}^3$ mit Selbstdurchdringung, wie in der Zeichnung auf der Rückseite nochmals zu sehen ist. Beschreiben Sie durch eine Folge von Zeichnungen, dass die Kleinsche Flasche K (mit Selbstdurchdringung) homotopieäquivalent zu dem topologischen Raum $S^2 \vee S^1 \vee S^1$ ist. Dabei bezeichnet $X \vee Y$ den topologischen Raum der dadurch entsteht, dass man die disjunkte Vereinigung $X \amalg Y$ bildet und dann zwei fest ausgewählte Punkte $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ miteinander identifiziert. Man klebt also die beiden topologischen Räume X und Y an genau einem Paar an Punkten zusammen.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Beschreiben Sie durch eine Folge von Zeichnungen, dass

(i) der "Torus mit Membran" $D_2 \amalg_f T^2$, mit Anhefteabbildung $f \colon S^1 \to T^2, x \mapsto (x, y_0)$ für ein festes $y_0 \in S^1$, homotopieäquivalent zu $S^2 \vee S^1$ ist.



(ii) $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$, wobei wir mit S^1 tatsächlich $S^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ meinen, homotopieäquivalent zu $S^2 \vee S^1$ ist.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Dr. Philip Möller

Einführung in die Topologie, SoSe 25
Blatt 6