Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Dr. Philip Möller

Einführung in die Topologie, SoSe 2025
Blatt 7

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Seien (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte topologische Räume. Zeigen Sie, dass, falls $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, der induzierte Homomorphismus $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ von Gruppen ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei G eine topologische Gruppe, welche wir als punktierten topologischen Raum mit dem neutralen Element $1 \in G$ als Basispunkt auffassen. Seien $\alpha, \beta\colon I \to G$ zwei Schleifen an 1.

(i) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung/Konkatenation $\beta\alpha$ homotop zum punktweisen Produkt $\beta \cdot \alpha$ ist.

(ii) Begründen Sie, dass $\beta \cdot \alpha$ und $\alpha \cdot \beta$ homotope Schleifen sind.

(iii) Folgern Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, 1)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei (X, x_0) ein punktierter wegzusammenhängender topologischer Raum. Begründen Sie, warum die Menge $\Omega(X, x_0)$ der Schleifen an x_0 zusammen mit der Hintereinanderausführung von Schleifen i.A. keines der drei Gruppenaxiome erfüllt.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
In dieser Aufgabe wollen wir den Fundamentalsatz der Algebra mit topologischen Mitteln beweisen.

(i) Geben Sie ein bildliches/intuitives Argument, warum $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ gelten sollte.

(ii) Sei $f = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ ein nicht-konstantes Polynom ohne Nullstelle in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass
$$p_r(t) = \frac{\frac{f(re^{2\pi it})}{f(r)}}{\left|\frac{f(re^{2\pi it})}{f(r)}\right|}$$
für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Schleife an $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ definiert, welche nullhomotop ist.

(iii) Vollenden Sie den Beweis, indem Sie begünden, dass $p_r(t)$ homotop zu einer Schleife in S^1 ist, deren Homotopieklasse unter dem Isomorphismus aus Teil (i) auf $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ abgebildet wird.