

Einführung in die Topologie, SoSe 25

Blatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Zeigen Sie, dass die Bündelprojektion eines Faserbündels eine offene Identifizierung ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Ist jede Überlagerung einer Mannigfaltigkeit erneut eine Mannigfaltigkeit?

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung mit wegzusammenhängendem Totalraum Y . Angenommen, p habe einen globalen Schnitt, d.h. es existiere eine stetige Abbildung $s: X \rightarrow Y$ mit $p \circ s = \text{id}_X$. Zeigen Sie, dass dann p bereits ein Homöomorphismus sein muss.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

- (i) Der Quotient $\mathbb{CP}^n$ von $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ bzgl. der Gruppenwirkung

$$S^1 \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}, (u, z) \mapsto uz$$

wird n -dimensionaler projektiver Raum über $\mathbb{C}$ genannt. Zeigen Sie, dass $\mathbb{CP}^1$ homöomorph zu S^2 ist.

- (ii) Überlegen Sie sich nun, dass die Quotientenabbildung $q: S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ ein Faserbündel $p: S^3 \rightarrow S^2$ mit Faser S^1 liefert.
- (iii) Ist das Faserbündel p trivial?