Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Dr. Philip Möller

Einführung in die Topologie, SoSe 25
Blatt 10

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Berechnen Sie rein unter Verwendung der Definition die Gruppe der Decktransformationen der Überlagerung $p_n\colon S^1 \to S^1$, $x \mapsto x^n$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Zeigen Sie mit Hilfe folgender Anleitung, dass es eine nicht-abelsche Gruppe G mit der Eigenschaft gibt, dass jede Untergruppe von G normal ist:

(i) Betrachten Sie die Untergruppe Q_8 von $SL_2(\mathbb{F}_3)$, welche aus den beiden Skalarmatrizen und den sechs spurlosen Matrizen aus besteht. Geben Sie die Elemente von Q_8 an.

(ii) Bestimmen Sie (nicht notwendigerweise mit ausführlicher Begründung) alle Untergruppen von Q_8 und zeigen Sie, dass diese normal sind.

(iii) Begründen Sie, dass Q_8 nicht abelsch ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfachzusammenhängender punktierter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass falls (X, x_0) genau eine nicht-triviale Isomorphieklasse von Überlagerungen besitzt, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung sein muss.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Seien G und H topologische Gruppen und sei $p\colon H \to G$ eine Überlagerung, welche zugleich ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(i) Begründen Sie kurz, dass die Faser $p^{-1}(1_G)$ über $1_G \in G$ eine Gruppe ist.

(ii) Zeigen Sie, dass man ein Element von $p^{-1}(1_G)$ als Decktransformation von p auffassen kann und so einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon p^{-1}(1_G) \to \mathcal{D}(p)$ erhält.

(iii) Ist φ stets ein Isomorphismus von Gruppen?