Einführung in die Topologie, SoSe 25 Blatt 11

Aufgabe 1 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass der Hawaiianische Ohrring keine universelle Überlagerung besitzt.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei X ein topologischer Raum und es existiere die universelle Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$. Sei weiter $A \subseteq X$ ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Teilraum und $\tilde{A} \subseteq \tilde{X}$ eine Wegzusammenhangskomponente von $p^{-1}(A)$.

Zeigen Sie, dass $p: \tilde{A} \rightarrow A$ die Überlagerung von A ist, welche zum Kern der Abbildung $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$ korrespondiert.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien (X, x_0) und (Y, y_0) zwei homotopieäquivalente gut zusammenhängende punktierte topologische Räume.

- (i) Zeigen Sie, dass auch die universellen Überlagerungen $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und $(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ homotopieäquivalent sind.
- (ii) Folgern Sie, dass $T^2 \setminus \{\text{pt}\}$ asphärisch ist, also dass die universelle Überlagerung von $T^2 \setminus \{\text{pt}\}$ zusammenziehbar ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen über Kategorien und Funktoren:

- (i) Morphismen sind Abbildungen.
- (ii) Zwischen je zwei Objekten gibt es Morphismen.
- (iii) Funktoren lassen sich als Morphismen von Kategorien auffassen.
- (iv) Funktoren erhalten Isomorphismen.