Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Dr. Philip Möller

# Einführung in die Topologie, SoSe 25
# Blatt 12

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte):**

(i) Seien $G$ und $H$ zwei Gruppen. Wir fassen diese als Kategorien $\underline{G}$ und $\underline{H}$ mit jeweils einem Objekt auf mit $\mathrm{Hom}_{\underline{G}}(\cdot,\cdot) = G$ und $\mathrm{Hom}_{\underline{H}}(\cdot,\cdot) = H$. Zeigen Sie, dass ein Funktor $F\colon \underline{G} \to \underline{H}$ dasselbe ist wie ein Gruppenhomomorphismus von $G$ nach $H$. Was ist eine natürliche Transformation zweier Funktoren $F, G\colon \underline{G} \to \underline{H}$?

(ii) Sei $R$ ein Ring (hier stets kommutativ und mit 1). Zeigen Sie, dass man die Zuordnung $R \mapsto \mathrm{GL}_n(R)$ für jedes $n \geq 1$ als einen Funktor $\mathrm{GL}_n\colon$ Ring $\to$ Grp auffassen kann, sodass die Determinante eine natürliche Transformation $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ definiert.

**Aufgabe 2 (5 Punkte):**
Sei $(X, x_0)$ ein gut zusammenhängender punktierter topologischer Raum. Wir betrachten nun zwei Kategorien:

- $\mathrm{Cov}(X, x_0)$, die Kategorie der punktierten Überlagerungen $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit wegzusammenhängendem Totalraum von $(X, x_0)$. Ein Morphismus von $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ nach $p'\colon (Y', y_0') \to (X, x_0)$ ist eine punktierte stetige Abbildung $f\colon (Y, y_0) \to (Y', y_0')$ mit $p' \circ f = p$. Automorphismen in $\mathrm{Cov}(X, x_0)$ sind also genau die Decktransformationen.
- $\mathrm{Sub}(\pi_1(X, x_0))$, die Kategorie der Untergruppen von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ mit Inklusionen als Morphismen.

Zeigen Sie, dass die Bildung der charakterischen Untergruppe einer Überlagerung einen Funktor $\mathrm{Char}\colon\ \mathrm{Cov}(X, x_0) \to \mathrm{Sub}(\pi_1(X, x_0))$ liefert, welcher eine Äquivalenz von Kategorien ist.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):**
Hat der Vergissfunktor $U\colon$ Top $\to$ Set einen Linksadjungierten/einen Rechtsadjungierten?

**Aufgabe 4 (5 Punkte):**
Sei $K$ ein Körper und sei $W$ ein $K$-Vektorraum. Wir betrachten die beiden Funktoren

$$- \otimes W, \mathrm{Hom}(W, -)\colon K\text{-Vect} \to K\text{-Vect}\,.$$

Zeigen Sie, dass $- \otimes W$ linksadjungiert zu $\mathrm{Hom}(W, -)$ ist.