Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Dr. Philip Möller

Einführung in die Topologie, SoSe 25
Blatt 13

Aufgabe 1 (5 Punkte):

(i) Zeigen Sie, dass Überlagerungen stabil unter Pullbacks entlang einer stetigen Abbildung sind: Ist $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung und ist $f\colon X' \to X$ eine stetige Abbildung, so ist auch die stetige Abbildung $\mathrm{pr}_1\colon X' \times_X Y \to X'$ eine Überlagerung.

(ii) Auf dem letzten Blatt hatten wir die Kategorie $\mathrm{Cov}(X, x_0)$ der punktierten Überlagerung über einem punktierten Raum eingeführt. Analog kann man auch die Kategorie der unpunktierten Überlagerungen $\mathrm{Cov}(X)$ über einem topologischen Raum X definieren. Begründen Sie nun, dass wir vermöge des ersten Aufgabenteiles für jede stetige Abbildung $f\colon X' \to X$ einen Funktor $f^*\colon \mathrm{Cov}(X) \to \mathrm{Cov}(X')$ erhalten.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche K ist (für einen beliebigen Basispunkt, daher lassen wir diesen in der Notation weg) durch $\pi_1(K) = \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$ gegeben. Zeigen Sie, dass diese isomorph zu der Gruppe $\langle c, d \mid c^2d^2 \rangle$ ist, indem Sie einen expliziten Isomorphismus angeben.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Wie sieht der Limes des Diagrammes

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

in Set konkret aus?

Aufgabe 4 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass Produkte und Koprodukte gewisse Limiten bzw. Kolimiten sind. Dabei haben wir eine Indexkategorie $\mathcal{I}$ mit genau zwei Objekten und nur den Identitätsmorphismen verwendet.

(i) Wie sollte die Indexkategorie $\mathcal{I}$ von beliebigen Produkten und Koprodukten aussehen?

(ii) Im Spezialfall einer leeren Indexkategorie nennt man das Produkt auch terminales Objekt und das Koprodukt auch initiales Objekt. Formulieren Sie diese beiden Definitionen aus (wie bei unserer Definition von binären Produkten und Koprodukten als wir Limiten und Kolimiten noch nicht zur Verfügung hatten).

(iii) Ist ein Objekt sowohl initial als auch terminal, so nennt man es Nullobjekt. Gibt es initiale, terminale oder Nullobjekte in den Kategorien Set, Grp, Ab, Top und Ring (kommutativ mit 1)?