Einführung in die Topologie, SoSe 25 Blatt 14

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Zeigen Sie, dass Rechtsadjungierte Limiten erhalten: Ist $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Rechtsadjungierter Funktor (mit Linksadjungiertem $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$) und $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Diagramm in $\mathcal{D}$ dessen Limes $(\lim(D) \xrightarrow{p_i} D(i))_{i \in \mathcal{I}}$ existiert, so ist $G(\lim(D)) \cong \lim(G \circ D)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (i) Zeigen Sie, dass $(G(\lim(D)) \xrightarrow{G(p_i)} G(D(i)))_{i \in \mathcal{I}}$ ein Kegel über $G \circ D$ ist.
- (ii) Sei nun $(C \rightarrow G(D(i)))_{i \in \mathcal{I}}$ ein beliebiger Kegel über $G \circ D$. Zeigen Sie, dass die Adjunktion einen Kegel über D liefert.
- (iii) Folgern Sie, dass es einen eindeutigen Morphismus

$$(F(C) \rightarrow D(i))_{i \in \mathcal{I}} \rightarrow (\lim(D) \xrightarrow{p_i} D(i))_{i \in \mathcal{I}}$$

von Kegeln über D gibt und dass dieser vermöge der Adjunktion den gesuchten eindeutigen Morphismus

$$(C \rightarrow G(D(i)))_{i \in \mathcal{I}} \rightarrow (G(\lim(D)) \xrightarrow{G(p_i)} G(D(i)))_{i \in \mathcal{I}}$$

von Kegeln liefert.

Analog kann man zeigen, dass Linksadjungierte Kolimiten erhalten.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Konstruieren Sie einen Linksadjungierten zum Vergissfaktor $U: \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$. Hat er einen Rechtsadjungierten?

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Wir hatten in der Vorlesung und in den Übungen bereits mehrmals behauptet, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(K)$ der Kleinschen Flasche K durch $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$ gegeben ist. Zeigen Sie dies.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei $i_2: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ die Inklusion des zweiten Faktors und sei X der Pushout von (i_2, i_2) .

- (i) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von X mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen.
- (ii) Stellen Sie X als ein (nicht-triviales) Produkt von topologischen Räumen dar und berechnen Sie dadurch erneut die Fundamentalgruppe von X .
- (iii) Überzeugen Sie sich davon, dass die beiden soeben berechneten Fundamentalgruppen isomorph sind, indem Sie einen konkreten Isomorphismus angeben.