Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 2

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ genau dann homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Seien X und Y zwei topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende sechs Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Abbildung f ist stetig, d.h. Urbilder offener Mengen unter f sind offen.

(ii) Urbilder abgeschlossener Mengen unter f sind abgeschlossen.

(iii) Für alle Elemente $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

(iv) Für alle Elemente $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ ist das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

(v) Für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$, d.h. das Urbild vom Inneren einer Teilmenge $B \subset Y$ ist stets im Inneren des Urbildes $f^{-1}(B)$ enthalten.

(vi) Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, d.h. das Bild vom Abschluss einer Teilmenge $A \subset X$ ist stets im Abschluss des Bildes $f(A)$ enthalten.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass ein zweitabzählbarer topologischer Raum X stets separabel ist. Hier wollen wir nun zeigen, dass falls $X = (X, d)$ ein metrischer Raum ist, auch die Umkehrung gilt (also, dass jeder separable metrische Raum X zweitabzählbar ist).

(i) Sei $\mathcal{B}$ eine Menge offener Mengen in einem topologischen Raum X. Zeigen Sie, dass falls für für jede offene Menge U in X und jeden Punkt $x \in U$ ein Element $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subset U$ existiert, die Menge $\mathcal{B}$ bereits eine Basis der Topologie sein muss (tatsächlich gilt auch die Umkehrung).

(ii) Zeigen Sie, dass falls eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X dicht in X ist, der Schnitt von A mit jeder nicht-leeren offenen Menge $U \subset X$ nicht leer ist (tatsächlich gilt auch die Umkehrung).

(iii) Sei nun $X = (X, d)$ eine metrischer Raum mit abzählbarer dichter Teilmenge S. Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{B}$ der offenen Bälle $B_{<\frac{1}{n}}(x)$ mit Radius $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ um Punkte $x \in S$. Begründen Sie kurz, dass $\mathcal{B}$ abzählbar ist und nutzen Sie die vorherigen Aufgabenteile um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 2

Aufgabe 4 (5 Punkte):
In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, dass sich endliche topologische Räume kombinatorisch studieren lassen. Sei X ein endliche Menge. Wir betrachten

$$\mathrm{Top}(X) = \{\tau \mid \tau \text{ ist eine Topologie auf } X\},$$

die Menge aller Topologien auf X und

$$\mathrm{PreO}(X) = \{\leq \mid \leq \text{ ist eine Präordnung auf } X\},$$

die Menge aller Präordnungen auf X. Wir definieren eine eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{PreO}(X),$$

indem wir eine Topologie τ auf X auf die Präordnung $\leq_\tau$ auf X abbilden, welche durch

$$x \leq_\tau y, \text{ falls } x \in U_y := \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ y \in U}} U$$

definiert ist.

(i) Begründen Sie kurz, dass die Abbildung φ wohldefiniert ist, also dass $\leq_\tau$ tatsächlich stets eine Präordnung auf X definiert.

(ii) Konstruieren Sie eine Umkehrabbildung ψ von φ.

(iii) Vermöge der Bijektion φ fassen wir von nun an endliche topologische Räume auch als endliche prägeordnete Räume auf. Sei nun Y ein weiterer endlicher topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann stetig ist, falls sie präordnungserhaltend ist, also für je zwei Elemente $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt, dass auch $f(x) \leq f(x')$ ist.