Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 4+5 (Abgabe am 15.11.)

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Wir wollen uns überlegen, dass Quotientenräume $X/\sim$ von zweitabzählbaren topologischen Räumen X nicht zwingend wieder zweitabzählbar sein müssen und betrachten dazu den zweitabzählbaren topologischen Raum $X = \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass das Kollabieren des Unterraumes $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ einen topologischen Raum liefert, welcher nicht einmal erstabzählbar und somit erst recht nicht zweitabzählbar ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Seien X, Y und K topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass falls K kompakt und $f\colon X \to Y$ eine Identifizierung ist, auch das Produkt $f \times \mathrm{id}_K\colon X \times K \to Y \times K$ eine Identifizierung ist. Sei dafür $g\colon Y \times K \to Z$ eine Abbildung. Wir wollen nun zeigen, dass g genau dann stetig ist, wenn $g \circ (f \times \mathrm{id}_K)$ stetig ist.

(i) Begründen Sie kurz, warum die Hinrichtung gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Projektion $\mathrm{pr}_1\colon X \times K \to X$ abgeschlossen ist, also abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet.

(iii) Nun nehmen wir an, dass $g \circ (f \times \mathrm{id}_K)$ stetig ist. Wir wählen eine offene Umgebung U eines Bildpunktes $g(y_0, k_0) \in Z$ und betrachten $V = \{y \in Y \mid g(\{y\} \times K) \subset U\} \subset Y$. Nutzen Sie Aufgabenteil (ii) und das f eine Identifizierung ist um zu zeigen, dass V offen und g somit stetig ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei X eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass jede Zusammenhangskomponente von X auch wegzusammenhängend ist und somit die Begriffe "Zusammenhangskomponenten" und "Wegzusammenhangskomponenten" für Mannigfaltigkeiten übereinstimmen. Insbesondere ist eine Mannigfaltigkeit X also genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Zeigen Sie, dass jede Mannigfaltigkeit die topologische Summe ihrer Zusammenhangskomponenten ist und folgern Sie, dass sich jede Mannigfaltigkeit als höchstens abzählbare topologische Summe wegzusammenhängender Mannigfaltigkeiten schreiben lässt.

bitte wenden

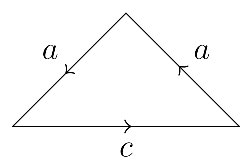
Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 4 +5 (Abgabe am 15.11.)

Aufgabe 5 (10 Punkte):

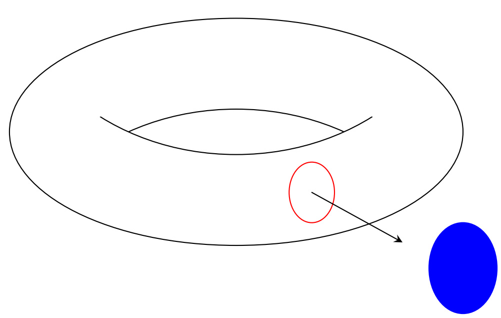
(i) Zeigen Sie, dass der wie folgt durch die Identifizierungen der Seiten eines Dreieckes entstehende topologische Raum ein Möbiusband ist:



(ii) In der Vorlesung wurde behauptet, dass die (zusammenhängende geschlossene) topologische Fläche, welche man erhält wenn man zwei Möbiusbänder an ihren Rändern verklebt, die Kleinsche Flasche ist. Zeigen Sie diese Behauptung (auf schematische Weise).

(iii) Wo ist die in Aufgabenteil (ii) konstruierte Fläche in der Klassifikation der zusammenhängenden geschlossenen Flächen zu finden?

Aufgabe 6 (10 Punkte):
Sei X die zusammenhängende geschlossene topologische Fläche, welche man erhält, wenn man eine Kreisscheibe vom Torus entfernt



und dann am dort entstandenen Rand ein Möbiusband entlang seines Randes verklebt.

(i) Zeigen Sie, dass sich X vermöge des Flächenwortes $abc^2a^{-1}b^{-1}$ beschreiben lässt.

(ii) Zu welcher der Ihnen durch die Klassifikation zusammenhängender geschlossener topologischer Flächen bekannte Fläche ist X homöomorph?