Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 9

Aufgabe 1 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass der Torus T^2 eine 2-blättrige Überlagerung der Kleinschen Flasche K ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Bestimmen Sie für $1 \leq n \leq 8$ die Anzahl der n-blättrigen Überlagerungen des Torus T^2 bis auf punktierten Isomorphismus.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sind die Eigenschaften "lokal wegzusammenhängend" und "semi-lokal einfach zusammenhängend" stabil unter Bildung von Quotienten, Produkten und Summen?

Aufgabe 4 [1](5 Punkte):
Sei X ein topologischer Raum. Für jede offene Menge U in X schreiben wir $\mathrm{WK}(U)$ für die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von U. Wir betrachten nun die von Mengen der Form $\mathrm{WK}(U)$ erzeugte Topologie auf X und schreiben $\mathrm{LW}(X)$ für den dadurch entstehenden topologischen Raum. Zeigen Sie, dass

(i) die Mengen der Form $\mathrm{WK}(U)$ sogar eine Basis der Topologie auf $\mathrm{LW}(X)$ bilden und die Identität $\mathrm{id}_X \colon \mathrm{LW}(X) \to X$ eine stetige Abbildung ist, also dass die Topologie von $\mathrm{LW}(X)$ die Topologie von X verfeinert.

(ii) falls Y ein lokal wegzusammenhängender Raum und $f \colon Y \to X$ stetig ist, auch f aufgefasst als Abbildung nach $\mathrm{LW}(X)$ stetig ist. Folgern Sie zudem daraus, dass die Abbildung

$$\mathrm{id}_X \circ - \colon \mathrm{Hom}(Y, \mathrm{LW}(X)) \to \mathrm{Hom}(Y, X),\ g \mapsto \mathrm{id}_X \circ g$$

eine Bijektion ist. Hierbei bezeichnen $\mathrm{Hom}(Y, \mathrm{LW}(X))$ und $\mathrm{Hom}(Y, X)$ die Mengen der stetigen Abbildungen von Y nach $\mathrm{LW}(X)$ bzw. X.

(iii) die Fundamentalgruppen $\pi_1(\mathrm{LW}(X), x_0)$ und $\pi_1(X, x_0)$ für jeden Basispunkt x_0 aus der Menge X isomorph sind (tatsächlich sind sogar die uns größtensteils noch nicht bekannten Invarianten π_n, H_n und H^n ($\rightsquigarrow$ Topologie I und II) von $\mathrm{LW}(X)$ und X jeweils für alle $n \geq 0$ isomorph zueinander).

(iv) $\mathrm{LW}(X)$ lokal wegzusammenhängend ist und genau dann mit X übereinstimmt, wenn X lokal wegzusammenhängend ist.

(v) $\mathrm{LW}(X)$ genau dann semi-lokal einfach-zusammenhängend ist, wenn X semi-lokal einfach-zusammenhängend.

Wir können somit vermöge der Konstruktion LW im Rahmen dieser Vorlesung stets annehmen, dass ein uns gegebener topoogischer Raum X lokal wegzusammenhängend ist.

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 9

Wir geben natürlich aufgrund des hier auftretenden geistigen Eigentumes Anderer eine Quelle an. Im eigenen Interesse sollten Sie die Quelle aber nur dann zu Rate ziehen, wenn Sie bei eigenen Lösungsversuchen nicht weiterkommen sollten.

Literatur

[1] Jeremy Brazas. The locally path-connected coreflection. https://wildtopology.com/2014/10/11/the-locally-path-connected-coreflection/ (accessed 04.12.21).