Übungsblatt 1

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 02.04.2019, Abgabe: Di., 09.04.2019

Aufgabe 1: (Komplexe Zahlen, $2+2+1+1$ Punkte)

a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{(i)} \quad z + \frac{1}{\bar{z}}, \qquad\qquad \bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $z \mapsto \bar{z} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Körperautomorphismus ist, d. h. eine bijektive Abbildung mit $\overline{z+\zeta} = \bar{z} + \bar{\zeta}$ und $\overline{z \cdot \zeta} = \bar{z} \cdot \bar{\zeta}$ für $z, \zeta \in \mathbb{C}$.

c) Zeigen Sie, dass $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ und $|z| = |\bar{z}|$ für $z \in \mathbb{C}$.

d) Zeigen Sie, dass $|z + \zeta|^2 + |z - \zeta|^2 = 2(|z|^2 + |\zeta|^2)$ für $z, \zeta \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2: (Argumentfunktion, 4 Punkte)
Geben Sie eine explizite Darstellung der Argumentfunktion $\arg : \Sigma_\pi \longrightarrow (-\pi, \pi)$ an, d. h. stellen Sie $\arg(z)$ für $z = x + iy \in \Sigma_\pi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ als Funktion von x und y dar. Zeigen Sie so, dass arg eine stetige Funktion ist.

Aufgabe 3: (Ordnungen auf $\mathbb{C}$, 3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Relation „$<$“ (bzw. „$>$“) keine Fortsetzung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ erlaubt, die den folgenden Anforderungen genügt:

(O1) Für alle $u, v \in \mathbb{C}$ gilt genau eine der Relationen $u < v$, $u = v$ oder $u > v$ *(Trichotomie)*.

(O2) Für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ folgt aus $u < v$ und $v < w$, dass $u < w$ *(Transitivität)*.

(O3) Für alle $u, v \in \mathbb{C}$ folgt aus $u < v$, dass $u + w < v + w$ für alle $w \in \mathbb{C}$, und, dass $uw < vw$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w > 0$ *(Monotonie)*.

Hinweis: Zeigen Sie, dass dann $z^2 > 0$ für alle $z \neq 0$ gelten müsste und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

Aufgabe 4: (Komplexe Polynome, 3 Punkte)
Bestimmen Sie alle Polynome $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f((1 + z)^2) = (1 + f(z))^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für jedes solche Polynom eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ paarweise verschiedener komplexer Zahlen z_n existiert mit $f(z_n) = z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.