Übungsblatt 2

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 09.04.2019, Abgabe: Di., 16.04.2019

Aufgabe 1: (Komplexe Zahlen, $1+1$ Punkte)
Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

a) $A := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1 - \operatorname{Re} z \,\}$, b) $B := \left\{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 2 \,\right\}$.

Aufgabe 2: (Reihen, $2+2$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+i}{(1+i)^{2k}}$.

Aufgabe 3: (Komplexe Differenzierbarkeit, $3+3$ Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_n, f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar an der Stelle $z \in \Omega$. Beweisen Sie die Leibniz- und die Quotientenregel:

a) Die Funktion $\prod_{k=1}^{n} f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ist differenzierbar an der Stelle z mit

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)'(z) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k'(z) \prod_{j=1, j\neq k}^{n} f_j(z) \right).$$

b) Ist $g(z) \neq 0$, dann ist $f/g : D_\varepsilon(z) \longrightarrow \mathbb{C}$ in einer offenen Kreisscheibe um z mit Radius $\varepsilon > 0$ wohldefiniert und differenzierbar an der Stelle z mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Aufgabe 4: (Zusammenhang in metrischen Räumen, 4 Punkte)
Sei (X, δ) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) (X, δ) ist zusammenhängend;

(ii) Ist $U \subseteq X$ offen und abgeschlossen, so folgt $U = \varnothing$ oder $U = X$;

(iii) Jede stetige Funktion $f : X \longrightarrow \{\, 0, 1 \,\}$ ist konstant.

Aufgabe 5: (Räume stetiger Funktionen, 2 Punkte)
Sei (X, δ) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $(BC(X), \|\cdot\|_{BC(X)})$ ein Banachraum ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $C(X) = BC(X)$, falls X kompakt ist.