Übungsblatt 3

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 16.04.2019, Abgabe: Di., 23.04.2019

Aufgabe 1: (Komplexe Differenzierbarkeit, 3 + 3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktionen $f,\, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar sind an der Stelle $0 \in \mathbb{C}$, wobei

a) $f(x+iy) := x^2y + ixy^2$, b) $g(x+iy) := \sin(x)\sin(y) - i\cos(x)\cos(y)$, $x,\, y \in \mathbb{R}$,

und bestimmen Sie $f'(0)$ und $g'(0)$.

Aufgabe 2: (Komplexe Differenzierbarkeit, 2 + 2 + 2 Punkte)
Betrachten Sie die Funktionen $u,\, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x,\, y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,\, y) \neq (0,\, 0), \\ 0, & x = y = 0, \end{cases} \qquad v(x,\, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,\, y) \neq (0,\, 0), \\ 0, & x = y = 0, \end{cases} \qquad x,\, y \in \mathbb{R},$$

und die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)$ für $x,\, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) u und v sind partiell differenzierbar an der Stelle $(x,\, y) = (0,\, 0)$.

b) u und v erfüllen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen an der Stelle $(x,\, y) = (0,\, 0)$.

c) f ist nicht komplex differenzierbar an der Stelle $z = 0$.

Hinweis: $u,\, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{\, (0,\, 0)\,\})$ aber u und v sind nicht differenzierbar an der Stelle $(x,\, y) = (0,\, 0)$.

Aufgabe 3: (Komplexe Differenzierbarkeit, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\lambda : \Sigma_\pi :\longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \lambda(z) := \log|z| + i \arg z, \qquad z \in \Sigma_\pi,$$

differenzierbar ist mit $\lambda'(z) = 1/z$ für $z \in \Sigma_\pi$. Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\lambda(z \cdot \zeta) = \lambda(z) + \lambda(\zeta), \qquad z,\, \zeta \in \Sigma_{\pi/2}.$$

Hinweis: Für $z,\, \zeta \in \Sigma_{\pi/2}$ ist $z \cdot \zeta \in \Sigma_\pi$. Beachten Sie die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen.

Aufgabe 4: (Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, 4 Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar. Seien $\hat{\Omega} := \{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + iy \in \Omega \,\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und

$$(u,\, v) := \hat{f} : \hat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \hat{f}(x,\, y) := \big(\operatorname{Re} f(x+iy),\ \operatorname{Im} f(x+iy)\big), \qquad (x,\, y) \in \hat{\Omega}.$$

Zeigen Sie: Ist $\hat{f} \in C^2(\hat{\Omega},\, \mathbb{R}^2)$ dann sind u und v harmonisch in $\hat{\Omega}$, d. h. $\Delta u = 0$ und $\Delta v = 0$ in $\hat{\Omega}$.

Hinweis: Der *Laplace-Operator* ist gegeben als $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.