Übungsblatt 4

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 23.04.2019, Abgabe: Di., 30.04.2019

Aufgabe 1: (Weglängen, 3 + 3 Punkte)
Seien $I = [\alpha, \beta]$, $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sowie $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{C}$ Wege mit $\sigma(\beta) = \gamma(a)$. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{len}(-\gamma) = \operatorname{len}\gamma$.

b) $\operatorname{len}(\sigma + \gamma) = \operatorname{len}\sigma + \operatorname{len}\gamma$.

Aufgabe 2: (Äquivalenz von Wegen, 4 Punkte)
Die Wege $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{C}$ seien gegeben durch $I = J = [-1, 1]$ und

$$\sigma(t) := (1 + i)\sqrt[3]{t}, \qquad \gamma(t) := (1 + i)t, \qquad -1 \le t \le 1.$$

Zeigen Sie: σ und γ sind äquivalent, $\sigma \notin C^1(I)$ und $\gamma \in C^1(J)$.

Aufgabe 3: (Weglängen, 4 Punkte)
Sei $\phi : [0, 1) \longrightarrow [1, \infty)$ streng monoton wachsend und stetig differenzierbar mit $\phi(0) = 1$ und $\lim_{t\to 1} \phi(t) = \infty$.
Sei $\rho : [0, 1) \longrightarrow (0, 1]$ definiert als $\rho(t) = 1/\phi(t)$ und sei $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert als

$$\gamma(t) = \rho(t)\big(\cos(2\pi\phi(t)) + i\sin(2\pi\phi(t))\big), \qquad 0 \le t < 1, \qquad \gamma(1) = 0.$$

Zeigen Sie:

a) γ ist stetig auf $[0, 1]$.

b) γ ist stetig differenzierbar auf $[0, 1)$ mit

$$\gamma'(t) = \big(\rho'(t) + 2\pi i\phi'(t)\rho(t)\big)\big(\cos(2\pi\phi(t)) + i\sin(2\pi\phi(t))\big), \qquad 0 \le t < 1.$$

c) Es gilt

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{4\pi^2 + \rho(t)^2} \cdot \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}, \qquad 0 \le t < 1.$$

d) γ ist ein Weg mit $\operatorname{len}\gamma = \infty$.

Hinweis: Für Teil d) können Sie verwenden, dass $\sqrt{4\pi^2 + \rho(t)^2} \ge 1$ für $0 \le t \le 1$.
Überlegen Sie sich ein konkretes Beispiel für ϕ. Machen Sie eine Skizze vom Verlauf von γ.

Aufgabe 4: (Differenzierbarkeit von Umkehrabbildungen, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\lambda : \Sigma_\pi \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \lambda(z) := \log|z| + i\arg z, \qquad z \in \Sigma_\pi,$$

differenzierbar ist mit $\lambda'(z) = 1/z$ für $z \in \Sigma_\pi$. Verwenden Sie dazu nicht die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, sondern die Tatsache, dass

$$\varepsilon(\lambda(z)) = z, \qquad z \in \Sigma_\pi,$$

und Proposition 1.1.14.

Hinweis: Sie können verwenden, dass die Funktion $\varepsilon : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(z) = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z))$ für $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar ist in $\mathbb{C}$ mit $\varepsilon'(z) = \varepsilon(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.