

Übungsblatt 5

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 30.04.2019, Abgabe: Di., 07.05.2019



Aufgabe 1: (Kurvenintegrale, 2 + 2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

$$\text{a) } \int_{\partial D_1(0)} z \, dz, \quad \text{b) } \int_{\partial D_1(0)} \bar{z} \, dz.$$

HINWEIS: Hierbei bezeichnet $\Gamma = \partial D_1(0)$ wie üblich die mathematisch positiv orientierte Einheitskreislinie mit $\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma) = -1$, d. h. $\Gamma = [\gamma]$ für z. B. den Weg $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \cos(t) + i \sin(t)$.

Aufgabe 2: (Kurvenintegrale, 2 + 2 + 2 Punkte)

Sei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ das Dreieck mit den Eckpunkten $-1, +1, i$. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

$$\text{a) } \int_{\partial \Delta} |z|^2 \, dz, \quad \text{b) } \int_{\partial \Delta} (z^4 - 2z + 1) \, dz, \quad \text{c) } \int_{\partial \Delta} \frac{1}{z+i} \, dz.$$

Aufgabe 3: (Rechenregeln für Kurvenintegrale, 3 + 3 Punkte)

Seien Σ und Γ Kurven endlicher Länge durch \mathbb{C} . Zeigen Sie:

a) Für jede stetige Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\int_{-\Gamma} f(z) \, dz = - \int_{\Gamma} f(z) \, dz.$$

b) Für jede stetige Funktion $f : \Sigma + \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\int_{\Sigma + \Gamma} f(z) \, dz = \int_{\Sigma} f(z) \, dz + \int_{\Gamma} f(z) \, dz.$$

Aufgabe 4: (Konvergenz von Kurvenintegralen, 2 Punkte)

Seien Γ eine Kurve endlicher Länge durch \mathbb{C} und $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und es gelte $f_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf Γ . Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz = \int_{\Gamma} f(z) \, dz.$$