Übungsblatt 6

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 07.05.2019, Abgabe: Di., 14.05.2019

Aufgabe 1: (Komplexe Exponentialfunktion, 2 Punkte)
Veranschaulichen Sie sich die Funktion $\varepsilon : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ aus 1.1.10 mit Hilfe einer Skizze wie in der Einleitung oder in 1.1.8, d. h. skizzieren Sie die Bilder verschiedener achsenparalleler Kurven unter ε.

Hinweis: Es ist $\varepsilon(z) = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$ für $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2: (Kurvenintegrale, 4 Punkte)
Sei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ ein Dreieck. Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_{\partial\Delta} \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = 2\pi i$$

für alle $z \in \Delta$.

Hinweis: Zeigen Sie ähnlich wie in 1.2.31, dass $\int_{\partial\Delta} \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$ für den Umkreis ∂D von Δ ist.

Aufgabe 3: (Stammfunktionen, 4 Punkte)
Seien $\varepsilon : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ wie in 1.1.10, $\rho > 0$ und $\Omega = \dot{D}_\rho(0)$. Zeigen Sie, dass keine stetige Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert mit $\varepsilon(f(z)) = z$ für alle $z \in \Omega$.

Hinweis: Es ist $\varepsilon(z) = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$ für $z \in \mathbb{C}$. Es ist $\dot{D}_\rho(0) = D_\rho(0) \setminus \{ 0 \}$.
Verwenden Sie Proposition 1.1.14 und Korollar 1.2.30; vgl. Aufgabe 4.4.

Aufgabe 4: (Kurvenintegrale, 6 Punkte)
Betrachten Sie die Kurve $\Gamma = [\gamma]$, die durch $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \sin(t) - i\cos(t)\sin(t)$ für $0 \le t \le 2\pi$ parametrisiert wird. Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z_\pm}\, \mathrm{d}\zeta = \pm 2\pi i$$

für $z_\pm = \pm\frac{1}{2}$.

Hinweis: Die Kurve Γ ist die sog. *Lemniskate von Gerono*. Skizzieren Sie Γ.
Zeigen Sie ähnlich wie in 1.2.31, dass $\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z_\pm}\, \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial D_{1/2}(z_+)} \frac{1}{\zeta - z_\pm}\, \mathrm{d}\zeta + \int_{\partial D_{1/2}(z_-)} \frac{1}{\zeta - z_\pm}\, \mathrm{d}\zeta$.

Aufgabe 5: (Potenzreihen, 4 Punkte)
Sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ \pm i \}$. Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{1 + z^2}, \qquad z \in \Omega,$$

in eine Potenzreihe um 0 und berechnen Sie deren Konvergenzradius.