Übungsblatt 7

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 14.05.2019, Abgabe: Di., 21.05.2019

Aufgabe 1: (Kovergenzradius, 2 Punkte)
Seien $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ 1+i \}$ und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben als

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z + 1}{(z-1-i)^2}, \qquad z \in \Omega.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $a_k = f^{(k)}(0)/k!$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Hinweis: f ist holomorph in Ω und der Konvergenzradius kann ohne explizite Berechnung der a_k bestimmt werden; vgl. Theorem 1.4.6.

Aufgabe 2: (Verhalten von Potenzreihen am Rand, $2+2+2$ Punkte)
Zeigen Sie, dass die Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k, \qquad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(z-1)^k}{k}, \qquad h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k^2}, \qquad z \in D_\varepsilon(1),$$

den gleichen Konvergenzradius $\varepsilon > 0$ haben und bestimmen Sie diesen. Zeigen Sie, dass die Potenzeihe im Fall der Funktion f in keinem Punkt $z \in \partial D_\varepsilon(1)$ konvergiert und im Fall der Funktion h in allen Punkten $z \in \partial D_\varepsilon(1)$ absolut konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass es im Fall der Funktion g Punkte $z \in \partial D_\varepsilon(1)$ gibt, in denen die Potenzreihe konvergiert, und, dass es Punkte $z \in \partial D_\varepsilon(1)$ gibt, in denen die Potenzreihe divergiert.

Aufgabe 3: (Cauchy-Integralformel, Kurvenintegrale, 2 Punkte)
Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial D_\pi(0)} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{(z-1)^4} \, \mathrm{d}z$$

einmal mit Hilfe von 1.2.31 und einmal mit Hilfe der Cauchy-Integralformel aus Theorem 1.4.6.

Aufgabe 4: (Cauchy-Integralformel für Rechtecke, $3+3$ Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Seien $a, b \in \Omega$ mit $\mathrm{Re}\, a < \mathrm{Re}\, b$ und $\mathrm{Im}\, a < \mathrm{Im}\, b$. Für das Rechteck $\square = \{ \mathrm{Re}((1-\lambda)a + \lambda b) + i\mathrm{Im}((1-\mu)a + \mu b) \, : \, 0 < \lambda < 1, \, 0 < \mu < 1 \}$ gelte $\bar{\square} \subseteq \Omega$. Zeigen Sie:

$$\text{a)} \quad \int_{\partial \square} f(z) \, \mathrm{d}z = 0 \qquad\qquad \text{b)} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \square} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in \square.$$

Hinweise: Für a) beachten Sie den Satz von Goursat (Theorem 1.4.2).
Für b) können Sie vorgehen wie im Beweis von Theorem 1.4.6.

Aufgabe 5: (Ganze Funktionen, 2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Re}\, f$ oder $\mathrm{Im}\, f$ beschränkt, dann ist f konstant.

Hinweis: Betrachten Sie die ganze Funktion $z \mapsto \exp(f(z))$ bzw. $z \mapsto \exp(if(z))$ und beachten Sie, dass $\exp(z) = \exp(\zeta)$ für $z, \zeta \in \mathbb{C}$ genau dann gilt, wenn $z = \zeta + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.