Übungsblatt 9

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 28.05.2019, Abgabe: Di., 04.06.2019

Aufgabe 1: (Folgen holomorpher Funktionen, 4 Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H(\Omega)$ so, dass jede der Funktionen f_n eine stetige Fortsetzung auf $\bar{\Omega}$ besitzt und

$$\sup_{z\in\partial\Omega} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

für eine Funktion $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass dann f die stetige Fortsetzung einer Funktion $f \in H(\Omega)$ auf $\partial\Omega$ ist, und, dass $f_n \to f$ gleichmäßig in Ω für $n \to \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie das Maximum-Prinzip und den Weierstraß'schen Konvergenzsatz.

Aufgabe 2: (Satz von Hurwitz, 4 Punkte)
Geben Sie ein Beispiel für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, einen Punkt $a \in \Omega$, einen Radius $\varepsilon > 0$ mit $\bar{D}_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$, eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H(\Omega)$ und eine Funktion $f \in H(\Omega)$ an, so dass $f_n \to f$ in $H(\Omega)$ für $n \to \infty$ und

$$\sum_{z\in\bar{D}_\varepsilon(a)} \operatorname{ord}_{f_n}(z) \neq \sum_{z\in\bar{D}_\varepsilon(a)} \operatorname{ord}_f(z), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Warum ist es möglich, so ein Beispiel zu konstruieren ohne dabei einen Widerspruch zum Satz von Hurwitz zu erzeugen?

Aufgabe 3: (Möbiustransformationen, $3+3$ Punkte)

a) Für $a \in D_1(0)$ sei $f_a : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ gegeben als

$$f_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad z \in D_1(0).$$

Zeigen Sie, dass f_a biholomorph ist mit $f_a^{-1} = f_{-a}$, und, dass

$$f_a(a) = 0, \qquad f_a(0) = -a, \qquad f_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2} > 0, \qquad f_a'(0) = 1 - |a|^2 > 0.$$

b) Zeigen Sie, dass jede biholomorphe Abbildung $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ mit $f(0) = 0$ eine Rotation um 0 ist.

Aufgabe 4: (Umlaufzahlen, $2+4$ Punkte)

a) Betrachten Sie die (geschlossene) Kurve $\Gamma = [\gamma]$ mit der Parametrisierung

$$\gamma : [-1,\, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = (1+t^2)\exp(2t\pi i), \qquad -1 \le t \le 1.$$

Skizzieren Sie Γ und bestimmen Sie die Umlaufzahl $\operatorname{ind}_\Gamma(0)$.

b) Geben Sie ein Beispiel für eine geschlossene Kurve Γ endlicher Länge an, so dass

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z_n) = n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

für eine geeignete Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gilt.

Hinweis: In Teil b) können Sie z. B. so vorgehen:

(i) Es sei $a_0 := 0$ und $a_n := \sum_{k=1}^n 2^{-k}$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie $J_n := [a_n,\, a_{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann kann man zeigen, dass $J_m \cap J_n = \varnothing$ für $m,\, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq n$, und, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} J_n = [0,\, 1)$.

(ii) Es seien $w_n := 2^{-(n+1)}$ und $\varepsilon_n := 2^{-(n+1)}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Damit kann man $\gamma : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definieren durch $\gamma|_{J_n} := \gamma_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma(1) := 0$, wobei

$$\gamma_n : J_n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_n(t) := w_n + \varepsilon_n\big(\cos(2^{n+2}\pi(t-a_n) - \pi) + i\sin(2^{n+2}\pi(t-a_n) - \pi)\big), \; t \in J_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann kann man zeigen, dass γ ein Weg endlicher Länge ist. Man beachte, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung γ_n eine Kreislinie um den Mittelpunkt w_n mit Radius ε_n parametrisiert mit $\gamma_n(a_n) = 0$ und $\lim_{t\to a_{n+1}} \gamma_n(t) = 0$.

(iii) Es seien $\Gamma := [\gamma]$ und $z_n := w_{n-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann kann man zeigen, dass alle geforderten Eigenschaften erfüllt sind.