Übungsblatt 10

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 04.06.2019, Abgabe: Di., 11.06.2019

Aufgabe 1: (Der Ring $H(\Omega)$, 4 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die Menge $H(\Omega)$ bildet auf natürliche Weise einen Ring. Zeigen Sie, dass dieser nullteilerfrei ist, d. h. für $f,\, g \in H(\Omega)$ folgt aus $fg \equiv 0$, dass $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$.

Hinweis: Denken Sie an den Identitätssatz.

Aufgabe 2: (Beschränkte Teilmengen von $H(\Omega)$, 4 Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$ beschränkt. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathcal{F}' := \{\, f' \;:\; f \in \mathcal{F}\,\} \subseteq H(\Omega)$ beschränkt ist.

Hinweis: Denken Sie an die Cauchy-Integralformel z. B. für Kreisscheiben.

Aufgabe 3: (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip, 6 Punkte)
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $J := U \cap \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Dann sind $\Omega := \{\, z \in U \;:\; \operatorname{Im} z > 0\,\} \subseteq \mathbb{C}$ und $\Omega^* := \{\, \bar{z} \;:\; z \in \Omega\,\} \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete. Sei $f : J \cup \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in $J \cup \Omega$ mit $f(J) \subseteq \mathbb{R}$ und holomorph in Ω. Zeigen Sie, dass dass die Funktion

$$g : J \cup \Omega \cup \Omega^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) := \begin{cases} f(z), & z \in J \cup \Omega, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \Omega^*, \end{cases} \qquad z \in J \cup \Omega \cup \Omega^*,$$

holomorph ist in dem Gebiet $J \cup \Omega \cup \Omega^* \subseteq \mathbb{C}$.

Hinweis: Denken Sie an den Satz von Morera.

Aufgabe 4: (Homotopie, 8 Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und Γ_0 und Γ_1 zwei Kurven durch Ω mit $\alpha(\Gamma_0) = \alpha(\Gamma_1)$ und $\omega(\Gamma_0) = \omega(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass Γ_0 genau dann homotop in Ω zu Γ_1 ist, wenn $\Gamma_0 - \Gamma_1$ nullhomotop in Ω ist.

Hinweis: Homotopie ist eine Äquivalenzrelation (dies muss nicht gezeigt werden). Zeigen Sie schrittweise:

a) Für jede Kurve Γ durch Ω ist $\Gamma - \Gamma$ nullhomotop in Ω.

b) Für jede Kurve Γ durch Ω sind Γ und $[\alpha(\Gamma)] + \Gamma$ zueinander homotop in Ω, wobei $[a] := [\gamma_a]$ für $a \in \Omega$ die Einpunktkurve bezeichnet, die durch $\gamma_a : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_a \equiv a$ parametrisiert wird.

c) Sind Γ_0 und Γ_1 zueinander homotop in Ω, dann sind auch $\Gamma_0 + \Gamma$ und $\Gamma_1 + \Gamma$ zueinander homotop in Ω für jede Kurve Γ durch Ω mit $\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma_j)$, $j = 0,\, 1$.

d) Γ_0 und $\Gamma_0 + \Gamma - \Gamma$ sind zueinander homotop in Ω für jede Kurve Γ durch Ω mit $\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma_0)$.

Machen Sie sich die Aussagen a) – d) mit Hilfe von Skizzen klar.