Übungsblatt 11

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 11.06.2019, Abgabe: Di., 18.06.2019

Aufgabe 1: (Einfach zusammenhängende Gebiete, 4 Punkte)
Seien $\Omega,\ \Omega' \subseteq \mathbb{C}$ zwei zueinander homöomorphe Gebiete. Zeigen Sie, dass Ω genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn Ω' einfach zusammenhängend ist.

Hinweis: Ω und Ω' sind genau dann zueinander homöomorph, wenn es einen Homöomorphismus $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ gibt, d. h. eine bijektive, stetige Abbildung mit stetiger Inverser $f^{-1} : \Omega' \longrightarrow \Omega$.

Aufgabe 2: (Einfach zusammenhängende Gebiete, $2+2+2$ Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jedes sternförmige Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie, dass Σ_π sternförmig und damit einfach zusammenhängend ist.

c) Geben Sie ein Beispiel an für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, das nicht sternförmig ist.

Hinweis: Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann sternförmig, wenn ein $z \in \Omega$ existiert, so dass $[z,\, \zeta] \subseteq \Omega$ für alle $\zeta \in \Omega$. Für Teil c) können Sie die Aussage aus Aufgabe 1 verwenden.

Aufgabe 3: (Holomorphe Fortsetzung entlang Kurven, $3+3$ Punkte)
Arbeiten Sie das Analogon von Beispiel 2.2.10 für die Quadratwurzel aus:

a) Seien $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\, 0 \,\}$ und $\Gamma_\pm := [\gamma_\pm]$ mit den Wegen

$$\gamma_\pm : [0,\, \pi] \longrightarrow \Omega, \qquad \gamma_\pm(t) := \cos(t) \pm i \sin(t), \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Weiterhin seien $a := \alpha(\Gamma_\pm) = 1$, $b := \omega(\Gamma_\pm) = -1$ und $\varepsilon := \rho := \frac{1}{2}$ sowie $f \in H(D_\varepsilon(a))$ gegeben als $f(z) := \mathrm{rt}_2(z)$ für $z \in D_\varepsilon(a)$ mit dem Hauptzweig der Quadratwurzel $\mathrm{rt}_2 : \Sigma_\pi \longrightarrow \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die holomorphen Fortsetzungen $g_\pm \in H(D_\rho(b))$ von f entlang $\Gamma_\pm$ und berechnen Sie $g_+(b) - g_-(b)$.

b) Seien $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\, 0 \,\}$ und $\Gamma := [\gamma]$ mit dem Weg

$$\gamma : [0,\, 2\pi] \longrightarrow \Omega, \qquad \gamma(t) := \cos(t) + i \sin(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Weiterhin seien $a := \alpha(\Gamma) = 1$, $b := \omega(\Gamma) = 1$ und $\varepsilon := \rho := \frac{1}{2}$ sowie $f \in H(D_\varepsilon(a))$ gegeben als $f(z) := \mathrm{rt}_2(z)$ für $z \in D_\varepsilon(a)$ mit dem Hauptzweig der Quadratwurzel $\mathrm{rt}_2 : \Sigma_\pi \longrightarrow \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die holomorphe Fortsetzung $g \in H(D_\rho(b))$ von f entlang Γ und berechnen Sie $g(b) - f(a)$.