Übungsblatt 12

Funktionentheorie, SoSe 2019

Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 18.06.2019, Abgabe: Di., 25.06.2019

Aufgabe 1: (Homotopie und Homologie, 4 Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und Σ, Γ zwei zueinander homotope Kurven endlicher Länge durch Ω. Zeigen Sie, dass Σ und Γ zueinander homolog sind in Ω.

Aufgabe 2: (Biholomorphe Abbildungen, $2+2+2$ Punkte)
Geben Sie jeweils eine biholomorphe Abbildung

a) $h : \Sigma_\pi \longrightarrow D_1(0)$, b) $h : \Sigma_{\pi/2} \longrightarrow D_1(0)$, c) $h : S_\pi \longrightarrow D_1(0)$

an, wobei $S_\pi := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \,\}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Caylay-Transformation

$$z \mapsto \tfrac{z-1}{z+1} : \Sigma_{\pi/2} \longrightarrow D_1(0)$$

und die Abbildungen $z \mapsto z^2 : \Sigma_{\pi/2} \longrightarrow \Sigma_\pi$ und $z \mapsto \exp(z) : S_\pi \longrightarrow \Sigma_\pi$.

Aufgabe 3: (Logarithmen und n-te Wurzeln, $3+3$ Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in H(\Omega)$ mit $0 \notin f(\Omega)$.

a) Sei $\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Logarithmus für f, d. h. sei λ stetig mit

$$\exp(\lambda(z)) = f(z), \qquad z \in \Omega.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda \in H(\Omega)$.

b) Sei $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ eine n-te Wurzel für f, d. h. sei ρ stetig mit

$$\rho(z)^n = f(z), \qquad z \in \Omega.$$

Zeigen Sie, dass $\rho \in H(\Omega)$.

Hinweis: Beachten Sie den Beweis von Proposition 1.1.14 (c). Um eine ähnliche Strategie verfolgen zu können, betrachten Sie einen Punkt $z \in \Omega$ und zeigen Sie, dass entweder ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $D_\varepsilon(z) \subseteq \Omega$ und $\lambda(\zeta) \neq \lambda(z)$ (bzw. $\rho(\zeta) \neq \rho(z)$) für alle $\zeta \in \dot{D}_\varepsilon(z)$, oder f konstant ist in Ω.