Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 1

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 11.04.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 20.04.2022 in der Übung

Aufgabe 1.1: (Konvexe und absolutkonvexe Mengen)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei X ein $\mathbb{F}$-linearer Raum und sei $A \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann konvex, wenn

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in A, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \ x_1, \ldots, x_n \in A, \ n \in \mathbb{N}.$$

(b) A ist genau dann absolutkonvex, wenn

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in A, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}, \ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq 1, \ x_1, \ldots, x_n \in A, \ n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 1.2: (Kreisförmige, konvexe und absolutkonvexe Mengen)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei X ein $\mathbb{F}$-linearer Raum, sei $\Lambda \neq \varnothing$ und sei $A_\lambda \subseteq X$ für $\lambda \in \Lambda$. Zeigen Sie:

(a) Ist A_λ kreisförmig für alle $\lambda \in \Lambda$, dann sind $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ und $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ kreisförmig.

(b) Ist A_λ konvex für alle $\lambda \in \Lambda$, dann ist $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ konvex.

Bemerkung: (a) und (b) implizieren, dass $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ absolutkonvex ist, falls A_λ absolutkonvex ist für alle $\lambda \in \Lambda$.

Aufgabe 1.3: (Kreisförmige, konvexe und absolutkonvexe Mengen)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei X ein $\mathbb{F}$-linearer Raum und seien $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) Sind A und B kreisförmig, dann ist $A + B$ kreisförmig.

(b) Sind A und B konvex, dann ist $A + B$ konvex.

(c) Ist A konvex, dann ist $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$ für alle $\alpha, \beta \geq 0$.

Bemerkung: (a) und (b) implizieren, dass $A + B$ absolutkonvex ist, falls A und B absolutkonvex sind.

Aufgabe 1.4: (Quasidreiecksungleichung)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei X ein $\mathbb{F}$-linearer Raum, sei $0 < p < 1$ und für das Funktional $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ gelte

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p, \qquad x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass für $\|\cdot\|$ die Quasidreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|), \qquad x, y \in X,$$

mit $C := 2^{\frac{1}{p} - 1} > 1$ gilt.

Hinweis: Die Funktion $\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ mit $\phi(t) := t^{\frac{1}{p}}$ für $t \geq 0$ ist konvex, d. h. es gilt insb.

$$\left(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t\right)^{\frac{1}{p}} = \phi\left(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t\right) \leq \tfrac{1}{2}\phi(s) + \tfrac{1}{2}\phi(t) = \tfrac{1}{2}s^{\frac{1}{p}} + \tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{p}}, \qquad s, t \geq 0.$$