Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 2

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 18.04.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 27.04.2022 in der Übung

Aufgabe 2.1: (Folgenräume)
Sei $\mathbb{F} \in \{\, \mathbb{R}, \mathbb{C} \,\}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt
$$\ell_p(\mathbb{F}) \subsetneq \ell_q(\mathbb{F}), \qquad 0 < p < q \leq \infty.$$

(b) Für $0 < p \leq 1$ ist die Abbildung $T : \ell_\infty(\mathbb{F}) \longrightarrow \ell_p(\mathbb{F})'$ mit
$$[T(y)](x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \qquad x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{F}),\ y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{F}),$$
wohldefiniert, linear, bijektiv und isometrisch.

Hinweis: T ist genau dann isometrisch, wenn $\sup_{\|x\|_p=1} |[T(y)](x)| = \|y\|_\infty$ ist für alle $y \in \ell_\infty(\mathbb{F})$.

Aufgabe 2.2: (Minkowskifunktionale)
Seien $\mathbb{F} \in \{\, \mathbb{R}, \mathbb{C} \,\}$ und X ein $\mathbb{F}$-linearer Raum. Seien $\varnothing \neq A \subseteq X$ kreisförmig und $|\cdot|_A : X \longrightarrow [0, \infty]$ mit
$$|x|_A := \inf \left\{\, \lambda > 0 \,:\, x \in \lambda A \,\right\}, \qquad x \in X,$$
das zugehörige Minkowskifunktional. Zeigen Sie:

(a) Es gilt genau dann $|x|_A < \infty$ für alle $x \in X$, wenn A absorbierend ist.

(b) Ist A absorbierend und gilt $A + A \subseteq CA$ für ein $C \geq 1$, dann ist $|\cdot|_A$ eine Semiquasinorm auf X.

(c) Ist A absorbierend und konvex, dann ist $|\cdot|_A$ eine Seminorm auf X.

Aufgabe 2.3: (Topologien und Umgebungsbasen)
Sei $X \neq \varnothing$. Für jedes $x \in X$ sei eine Familie von Mengen $\varnothing \neq \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$ gegeben, so dass gilt:

(i) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathcal{B}(x)$ gilt $x \in U$.

(ii) Für jedes $x \in X$ und alle $U, V \in \mathcal{B}(x)$ existiert $W \in \mathcal{B}(x)$ mit $W \subseteq U \cap V$.

(iii) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathcal{B}(x)$ existiert $V \subseteq U$ mit $x \in V$, so dass für jedes $y \in V$ ein $W \in \mathcal{B}(y)$ existiert mit $W \subseteq V$.

Zeigen Sie:

(a) Die Familie von Mengen
$$\mathcal{T} := \Big\{\, U \subseteq X \,:\, \text{für jedes } x \in U \text{ existiert } V \in \mathcal{B}(x) \text{ mit } V \subseteq U \,\Big\}$$
definiert eine Topologie auf X.

(b) Mit
$$\mathcal{N}(x) := \Big\{\, U \subseteq X \,:\, \text{es existiert } V \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in V \subseteq U \,\Big\}, \qquad x \in X,$$
gilt: Für alle $x \in X$ und $U \subseteq X$ gilt genau dann $U \in \mathcal{N}(x)$, wenn $V \in \mathcal{B}(x)$ existiert mit $V \subseteq U$.

Aufgabe 2.4: (Produkttopologien)
Seien $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ topologische Räume und $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ die Produkttopologie auf $X \times Y$. Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} = \Big\{\, \textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \times V_\lambda \,:\, \Lambda \neq \varnothing \text{ und } U_\lambda \in \mathcal{S},\ V_\lambda \in \mathcal{T} \text{ für alle } \lambda \in \Lambda \,\Big\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung von $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ aus Definition 1.2.20.