Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 3

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 25.04.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 04.05.2022 in der Übung

Aufgabe 3.1: (Minkowskifunktionale)
Seien $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\varnothing \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen, absorbierenden Mengen. Für jedes $U \in \mathcal{B}$ sei $|\cdot|_U : X \longrightarrow [0, \infty)$ das zugehörige Minkowskifunktional. Zeigen Sie, dass

$$\{ x \in X : |x|_U < 1 \} \subseteq U \subseteq \{ x \in X : |x|_U \leq 1 \}.$$

Bemerkung: Setzt man $\mathcal{C} := \{ \{ x \in X : |x|_U \leq \varepsilon \} : U \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und existiert für jedes $\lambda \in \mathbb{F}$ und jedes $U \in \mathcal{B}$ ein $V \in \mathcal{B}$ mit $\lambda V \subseteq U$, dann kann man zeigen: Für jedes $U \in \mathcal{B}$ existiert ein $V \in \mathcal{C}$ mit $V \subseteq U$ und für jedes $V \in \mathcal{C}$ existiert ein $U \in \mathcal{B}$ mit $U \subseteq V$.

Aufgabe 3.2: (Stetigkeit in topologischen Räumen)
Seien $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ und $(Z, \mathcal{R})$ topologische Räume und sei $f : X \times Y \longrightarrow Z$ stetig (bzgl. $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ und $\mathcal{R}$). Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ die Abbildung $f(x, \cdot) : Y \longrightarrow Z$ stetig ist (bzgl. $\mathcal{T}$ und $\mathcal{R}$).

Aufgabe 3.3: (Nullumgebungsbasen)
Seien $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und X ein $\mathbb{F}$-linearer Raum sowie $\varnothing \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $U \in \mathcal{B}$ gilt $0 \in U$.

(ii) Für alle $U, V \in \mathcal{B}$ existiert $W \in \mathcal{B}$ mit $W \subseteq U \cap V$.

(iii) Jedes $U \in \mathcal{B}$ ist kreisförmig und absorbierend.

(iv) Für jedes $U \in \mathcal{B}$ existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $V + V \subseteq U$.

Zeigen Sie: Für jedes $\lambda \in \mathbb{F}$ und jedes $U \in \mathcal{B}$ existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $\lambda V \subseteq U$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $U \in \mathcal{B}$ ein $V \in \mathcal{B}$ existiert mit $nV \subseteq U$.

Aufgabe 3.4: (Hausdorff'sche Trennungseigenschaft)
Sei $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und sei $\varnothing \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Nullumgebungsbasis. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(X, \mathcal{T})$ hat die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft.

(ii) Für jedes $x \in X$ mit $x \neq 0$ existiert $U \in \mathcal{B}$ mit $U \cap (x + U) = \varnothing$.

(iii) Es gilt $\bigcap_{U \in \mathcal{B}} U = \{ 0 \}$.