Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 4

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 02.05.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 11.05.2022 in der Übung

Aufgabe 4.1: (Konvexe Hülle)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und seien X ein $\mathbb{F}$-linearer Raum sowie $\varnothing \neq A \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) Es ist
$$\operatorname{co}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \,:\, n \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0,\ \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1,\ x_1, \ldots, x_n \in A \right\}.$$

(b) Ist A kreisförmig, so ist $\operatorname{co}(A)$ absolutkonvex.

Aufgabe 4.2: (Distanzfunktional)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$. Das Distanzfunktional $\operatorname{dist}(\,\cdot\,, U) : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ für U ist gegeben als $\operatorname{dist}(x, U) := \inf_{u \in U} |x - u|$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{dist}(\,\cdot\,, U)$ nicht-expansiv ist, d. h.
$$|\operatorname{dist}(x, U) - \operatorname{dist}(y, U)| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n,$$
und, dass $\operatorname{dist}(x, U) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann gilt, wenn $x \in \bar{U}$.

Aufgabe 4.3: (Kompakte Ausschöpfungen)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie:

(a) Ist $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω und ist $A \subseteq \Omega$ kompakt, dann existiert ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $A \subseteq A_j$.

(b) Ist $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, dann ist durch
$$A_j := \left\{ x \in \Omega \,:\, |x| \leq j \text{ und } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \tfrac{1}{j} \right\}, \qquad j \in \mathbb{N},$$
eine kompakte Ausschöpfung $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Ω gegeben.

Aufgabe 4.4: (Glatte Funktionen)
Geben Sie ein Beispiel für eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $f^{(k)}(0) \geq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.