Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 5

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 09.05.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 18.05.2022 in der Übung

Aufgabe 5.1: (Normen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{F})$)
Sei $\mathbb{F} \in \{\,\mathbb{R},\,\mathbb{C}\,\}$, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien die Familien von Halbnormen $(|\cdot|_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n}$, $(|\cdot|_{\ell,\alpha})_{\ell\in\mathbb{N}_0,\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ und $(|\cdot|_{\ell,m})_{\ell,m\in\mathbb{N}_0}$ definiert wie in Beispiel 1.4.15. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\alpha,\,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $\ell \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$|\cdot|_{\alpha,\beta} \le |\cdot|_{\ell,\beta} \qquad \text{auf} \qquad C^\infty(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{F}).$$

(b) Für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $m \in \mathbb{N}_0^n$, so dass

$$|\cdot|_{\ell,\alpha} \le |\cdot|_{\ell,m} \qquad \text{auf} \qquad C^\infty(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{F}).$$

(c) Für alle $\ell,\,m \in \mathbb{N}_0$ existieren $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_N,\,\beta_1,\,\ldots,\,\beta_N \in \mathbb{N}_0^n$ sowie ein $C > 0$, so dass

$$|\cdot|_{\ell,m} \le C\max\nolimits_{k=1,\ldots,N}|\cdot|_{\alpha_k,\beta_k} \qquad \text{auf} \qquad C^\infty(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{F}).$$

Aufgabe 5.2: (Metrisierbarkeit)
Sei $(X,\,+,\,\cdot,\,\mathcal{T})$ ein lokal konvexer Raum, der die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft hat und wobei $\mathcal{T}$ von einer abzählbaren Familie von Seminormen $(|\cdot|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugt wird. Sei $\mu : X \times X \longrightarrow [0,\,\infty)$ gegeben als

$$\mu(x,\,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,\frac{|x-y|_k}{1+|x-y|_k}, \qquad\qquad x,\,y \in X.$$

Zeigen Sie, dass μ eine translationsinvariante Metrik auf X ist, und, dass die von μ auf X induzierte Topologie mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $k_1,\,\ldots,\,k_n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\bar{B}_\delta(x) \subseteq \{\,y \in X \;:\; \max_{\ell=1,\ldots,n}|y-x|_{k_\ell} \le \varepsilon\,\}$, und, dass für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ umgekehrt auch $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ existieren, so dass $\{\,y \in X \;:\; \max_{k=1,\ldots,n}|y-x|_k \le \delta\,\} \subseteq \bar{B}_\varepsilon(x)$. Hierbei bezeichnet $\bar{B}_\rho(x)$ die abgeschlossene Kugel bzgl. μ um $x \in X$ mit Radius $\rho > 0$.

Aufgabe 5.3: (Diagonalfolgenprinzip)

(a) Sei $(X,\,\mu)$ ein metrischer Raum. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ seien $(x_{k,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $x_k \in X$ so, dass $x_{k,\ell} \to x_k$ für $\ell \to \infty$ in $(X,\,\mu)$. Sei weiterhin $x \in X$ so, dass $x_k \to x$ for $k \to \infty$ in $(X,\,\mu)$. Zeigen Sie, dass es eine streng monoton wachsende Folge $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_{k,\ell_k} \to x$ für $k \to \infty$ in $(X,\,\mu)$.

(b) Sei $\mathbb{F} \in \{\,\mathbb{R},\,\mathbb{C}\,\}$, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}(\Omega,\,\mathbb{F})$ nicht metrisierbar ist.