Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 6

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 16.05.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 25.05.2022 in der Übung

Aufgabe 6.1: (Quotientenräume)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{F}$, sei $Y \subseteq X$ ein $\mathbb{F}$-linearer Unterraum und sei die Quotiententopologie $\mathcal{T}/Y$ auf $X/Y = \{ x + Y : x \in X \}$ gegeben als

$$\mathcal{T}/Y := \Big\{ U \subseteq X/Y \,:\, q^{-1}(U) \in \mathcal{T} \Big\},$$

wobei $q : X \longrightarrow X/Y$ die zugehörige Quotientenabbildung bezeichnet, d. h. $q(x) = x + Y$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $+ : X/Y \times X/Y \longrightarrow X/Y$ und $\cdot : \mathbb{F} \times X/Y \longrightarrow X/Y$ beide stetig sind bzgl. $\mathcal{T}/Y$, d. h. dass $(X/Y, +, \cdot, \mathcal{T}/Y)$ einen topologischen Vektorraum über $\mathbb{F}$ bildet.

Aufgabe 6.2: (Endlichdimendionale topologische Vektorräume)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{F}$, der die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft hat, mit $\dim X = 1$. Sei $x \in X$, so dass $X = \operatorname{lin}\{x\}$, und sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Nullumgebungsbasis für $(X, \mathcal{T})$ mit den Eigenschaften 1.3.4 (i) − (v). Sei $(|\cdot|_U)_{U \in \mathcal{B}}$ die zugehörige Familie von Minkowskifunktionalen.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $U \in \mathcal{B}$ eine Konstante $m_U \geq 0$ existiert, so dass $|\alpha x|_U = m_U |\alpha|$ für alle $\alpha \in \mathbb{F}$.

(b) Zeigen Sie, dass ein $U \in \mathcal{B}$ existiert mit $m_U > 0$.

(c) Wenden Sie Korollar 1.3.7 auf die Familie $(|\cdot|_U)_{U \in \mathcal{B}}$ an, um zu zeigen, dass $\{ \{ \alpha x : |\alpha| \leq \varepsilon \} : \varepsilon > 0 \}$ eine Nullumgebungsbasis für $(X, \mathcal{T})$ bildet.

(d) Zeigen Sie, dass die topologischen Vektorräume $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ und $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ zueinander isomorph sind.

Aufgabe 6.3: (Distributionen)
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und stetig sind:

(a) $T\phi := \partial_{x_k}^m \phi(0)$, (b) $T\phi := \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \phi(x)\, \mathrm{d}x$, (c) $T\phi := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)|$,

(d) $T\phi := \sum_{j=0}^{\infty} \phi(je_k)$, (e) $T\phi := \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_k}^m \phi(x)\, \mathrm{d}x$, (f) $T\phi := \sum_{j=0}^{\infty} (\partial_{x_k}^j \phi)(je_k)$.