Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 7

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 23.05.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 01.06.2022 in der Übung

Aufgabe 7.1: (Einbettungen)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei $m \in \mathbb{N}_0$, sei $n \in \mathbb{N}$, sei $1 \leq p \leq \infty$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass die Einbettungen

$$\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{F}) \hookrightarrow BC^m(\Omega, \mathbb{F}) \hookrightarrow BC(\Omega, \mathbb{F}) \hookrightarrow C(\Omega, \mathbb{F}) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{F}) \hookrightarrow \mathcal{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$$

stetig sind.

Aufgabe 7.2: (Temperierte Distributionen)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\delta_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Sei $\ell \in \mathbb{N}_0$ und sei $f \in \mathcal{L}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ so, dass $|f(x)| \leq 1 + |x|^\ell$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass durch $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f\phi \,\mathrm{d}x : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ eine temperierte Distribution definiert wird.

Aufgabe 7.3: (Distributionelle Ableitungen)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $1 \leq p \leq \infty$, sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $f \in C^m(\Omega, \mathbb{F})$. Zeigen Sie, dass $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$.

Hinweis: Sie können (ohne Beweis) verwenden, dass für jede kompakte Menge $A \subseteq \Omega$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $A \subseteq U \subseteq \Omega$.

Aufgabe 7.4: (Dualräume)
Sei $0 < p < 1$ und sei $\Omega := (0, 1)$.

(a) Nehmen Sie an, dass $\varphi \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})^*$ und $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$ mit $|\varphi(f)| \geq 1$.

(i) Zeigen Sie, dass ein $0 < s < 1$ existiert mit

$$\int_0^s |f(t)|^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 |f(t)|^p \,\mathrm{d}x > 0.$$

(ii) Mit $0 < s < 1$ wie in (i) seien $g := \chi_{[0,s]} f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$ und $h := \chi_{(s,1]} f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $f = g + h$, $|f|^p = |g|^p + |h|^p$ sowie

$$\int_0^1 |g(t)|^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 |h(t)|^p \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 |f(t)|^p \,\mathrm{d}x.$$

(iii) Seien g und h wie in (ii). Zeigen Sie, dass für $\tilde{f} = 2g$ oder $\tilde{f} = 2h$ gilt, dass $\tilde{f} \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$ mit $|\varphi(\tilde{f})| \geq 1$ und $|\tilde{f}|_p = 2^{1-1/p}|f|_p$.

(b) Nehmen Sie an, dass $\varphi \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})^*$ mit $\varphi \neq 0$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$ existiert, so dass $|\varphi(f_k)| \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f_k \to 0$ für $k \to \infty$ in $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$.

(c) Folgern Sie, dass $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})' = \{0\}$.