Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 8

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 30.05.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 08.06.2022 in der Übung

Aufgabe 8.1: (Dirac-Distribution)
Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \in \mathcal{L}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ gibt mit $T_f = \delta_0$.

Hinweis: Verwenden Sie den Fundamentalsatz der Variationsrechnung: Ist $n \in \mathbb{N}$, ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und ist $f \in \mathcal{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C})$ so, dass $\int_\Omega \phi f \, dx = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$, dann ist $f = 0$ a. e. in Ω.

Aufgabe 8.2: (Reguläre Distributionen)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass die Einbettung

$$f \mapsto T_f : \mathcal{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{F})$$

stetig ist.

Aufgabe 8.3: (Reguläre Distributionen)
Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$ und seien $f, g \in \mathcal{L}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$ so, dass $f_k \to f$ f. ü. in Ω für $k \to \infty$ und $|f_k| \le g$ f. ü. in Ω für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $T_{f_k} \to T_f$ für $k \to \infty$ in $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{F})$.

Aufgabe 8.4: (Konvergenz von Distributionen)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x) := \frac{1}{1 + |x|^{n+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Für $\varepsilon > 0$ sei weiter $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $f_\varepsilon := \varepsilon^{-n} f(\,\cdot\,/\varepsilon)$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $\alpha_n > 0$ gibt, so dass $T_{\alpha_n f_\varepsilon} \to \delta_0$ für $\varepsilon \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.