

# Funktionenräume

## Sommersemester 2022

### Übungsblatt 10

Mathematisches Institut  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 13.06.2022, 14:00 Uhr  
Besprechung: Mi., 22.06.2022 in der Übung

#### Aufgabe 10.1: (Distributionen in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ )

Sei  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und sei  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Sei  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  mit  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi|_{B_1(0)} \equiv 1$  und  $\text{spt } \psi \subseteq B_2(0)$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $\psi_k := \psi(\cdot/k) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .  
Zeigen Sie, dass  $(\psi_k \phi)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$  mit  $\psi_k \phi \rightarrow \phi$  für  $k \rightarrow \infty$  in  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$  für alle  $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ .
- (b) Seien  $S, T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$  mit  $S\phi = T\phi$  für alle  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ . Zeigen Sie, dass  $S = T$ .

#### Aufgabe 10.2: (Faltung von regulären Distributionen)

Sei  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $f, g \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$ , wobei  $f = 0$  f. ü. in  $\mathbb{R}^n \setminus A$  für eine kompakte Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass  $T_f * T_g = T_{f*g}$ .

#### Aufgabe 10.3: (Faltung von Distributionen)

Sei  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $R, S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ , so dass zwei dieser Distributionen kompakten Träger haben. Zeigen Sie, dass  $(R * S) * T = R * (S * T)$ .