

Funktionenräume

Sommersemester 2022

Übungsblatt 10

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 13.06.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 22.06.2022 in der Übung

Aufgabe 10.1: (Distributionen in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$)

Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Sei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi|_{B_1(0)} \equiv 1$ und $\text{spt } \psi \subseteq B_2(0)$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\psi_k := \psi(\cdot/k) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Zeigen Sie, dass $(\psi_k \phi)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ mit $\psi_k \phi \rightarrow \phi$ für $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ für alle $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$.
- (b) Seien $S, T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ mit $S\phi = T\phi$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$. Zeigen Sie, dass $S = T$.

Aufgabe 10.2: (Faltung von regulären Distributionen)

Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$, wobei $f = 0$ f. ü. in $\mathbb{R}^n \setminus A$ für eine kompakte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $T_f * T_g = T_{f*g}$.

Aufgabe 10.3: (Faltung von Distributionen)

Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $R, S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$, so dass zwei dieser Distributionen kompakten Träger haben. Zeigen Sie, dass $(R * S) * T = R * (S * T)$.