Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 11

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 20.06.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 29.06.2022 in der Übung

Aufgabe 11.1: (Fouriertransformation)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Regeln für die Fouriertransformation:

(a) Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben als $g(x) := \overline{f(-x)}$ für $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist $g \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$ und $(\mathcal{F}g)(\xi) = \overline{(\mathcal{F}f)(\xi)}$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $a \in \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben als $g(x) := f(x-a)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist $g \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$ und $(\mathcal{F}g)(\xi) = e^{-ia\cdot\xi}(\mathcal{F}f)(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(c) Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $a \in \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben als $g(x) := e^{ia\cdot x}f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist $g \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$ und $(\mathcal{F}g)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi - a)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(d) Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $\alpha > 0$ und $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben als $g(x) := \alpha^{-n}f(\alpha^{-1}x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist $g \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$ und $(\mathcal{F}g)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\alpha\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 11.2: (Satz von Paley-Wiener)
Sei $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Hat f kompakten Träger (d. h. gilt $f = 0$ f. ü. in $\mathbb{R} \setminus A$ für eine kompakte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$), dann existiert eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass $F|_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}f$.

(b) Haben f und $\mathcal{F}f$ beide kompakten Träger, dann ist $f = 0$ f. ü. in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 11.3: (Produkt von glatten Funktionen und temperierten Distributionen)
Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ und sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existiere $C_\alpha > 0$ und $\ell_\alpha \in \mathbb{N}_0$, so dass $|\partial^\alpha f(x)| \le C_\alpha(1 + |x|^{\ell_\alpha})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $fT : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ mit

$$(fT)(\phi) := T(f\phi), \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}),$$

wohldefiniert ist und eine temperierte Distribution darstellt, d. h. $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$.