Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Funktionenräume
Sommersemester 2022
Übungsblatt 12

Ausgabe: Mo., 27.06.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 06.07.2022 in der Übung

Aufgabe 12.1: (Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Regeln für die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$:

(a) $\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ sind stetige, lineare Operatoren, die invers zueinander sind.

(b) Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Definiere $S := (x \mapsto x^\alpha)T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ als

$$S\phi := T(x \mapsto x^\alpha \phi), \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

Dann ist $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit $\mathcal{F}S = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \mathcal{F}T$.

(c) Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Definiere $S := \partial^\alpha T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ als

$$S\phi := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi), \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

Dann ist $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit $\mathcal{F}S = (\xi \mapsto (i\xi)^\alpha)\mathcal{F}T$.

Aufgabe 12.2: (Fouriertransformation auf $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, dann ist

$$\mathcal{F}_2 f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, dann ist $\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}$, wobei die linke Seite i. S. v. Def. 2.6.24 zu verstehen ist und auf der rechten Seite die Fouriertransformation auf $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ angewendet wird.

(c) Ist $f \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, dann ist $\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}_2 f}$, wobei die linke Seite i. S. v. Def. 2.6.24 zu verstehen ist und auf der rechten Seite die Fouriertransformation auf $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ angewendet wird.

Hinweis: Sie können (ohne Beweis) verwenden, dass für jedes $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *eine Folge* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *existiert, so dass* $f_k \to f$ *in* $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $f_k \to f$ *in* $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *für* $k \to \infty$.

Aufgabe 12.3: (Partielle Integration in Sobolevräumen)
Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, sei $m \in \mathbb{N}_0$ und seien $1 \le p, q \le \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $q < \infty$. Sei weiterhin ${}_0W_q^m(\Omega, \mathbb{F}) := \mathrm{cls}(\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{F}), W_q^m(\Omega, \mathbb{F}), \|\cdot\|_{W_q^m(\Omega,\mathbb{F})})$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega (\partial^\alpha u) v \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(\partial^\alpha v)\, \mathrm{d}x, \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \le m,$$

für alle $u \in W_p^m(\Omega, \mathbb{F})$ und alle $v \in {}_0W_q^m(\Omega, \mathbb{F})$.

Bemerkung: $\mathrm{cls}(U, W_q^m(\Omega, \mathbb{F}), \|\cdot\|_{W_q^m(\Omega,\mathbb{F})})$ *bezeichnet für eine Menge* $U \subseteq W_q^m(\Omega, \mathbb{F})$ *den Abschluss von* U *in* $W_q^m(\Omega, \mathbb{F})$ *bzgl. der Norm* $\|\cdot\|_{W_q^m(\Omega,\mathbb{F})}$*. Ist dabei* U *ein* $\mathbb{F}$*-linearer Unterraum von* $W_q^m(\Omega, \mathbb{F})$*, dann ist auch* $\mathrm{cls}(U, W_q^m(\Omega, \mathbb{F}), \|\cdot\|_{W_q^m(\Omega,\mathbb{F})})$ *ein* $\mathbb{F}$*-linearer Unterraum von* $W_q^m(\Omega, \mathbb{F})$*. Man kann (z. B. durch Verwendung geeigneter Mollifier) zeigen, dass* ${}_0W_q^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) = W_q^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_0$ *und alle* $1 \le q < \infty$*. Für ein Gebiet* $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ *gilt jedoch i. d. R.* ${}_0W_q^m(\Omega, \mathbb{F}) \subsetneq W_q^m(\Omega, \mathbb{F})$.