

# Funktionenräume

## Sommersemester 2022

### Übungsblatt 13

Mathematisches Institut  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 04.07.2022, 14:00 Uhr  
Besprechung: Mi., 13.07.2022 in der Übung

**Aufgabe 13.1:** (Besselpotentiale auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  und  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ )

Sei  $n \in \mathbb{N}$ , sei  $s \in \mathbb{R}$  und sei  $m_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben als  $m_s(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{-s/2}$  für  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Das Besselpotential  $\mathcal{B}_s$  sei der Fouriermultiplikationsoperator mit Symbol  $m_s$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\mathcal{B}_s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist ein Isomorphismus mit  $\mathcal{B}_s^{-1} = \mathcal{B}_{-s}$ .
- (b)  $\mathcal{B}_s : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist ein Isomorphismus mit  $\mathcal{B}_s^{-1} = \mathcal{B}_{-s}$ .

*Hinweis:* Für Teil (b) genügt es zu zeigen, dass  $u \mapsto \mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}u) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ein stetiger linearer Operator ist für alle  $m \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

**Aufgabe 13.2:** (Besselpotentialräume)

Sei  $n \in \mathbb{N}$ , sei  $s \in \mathbb{R}$  und sei  $1 < p < \infty$ . Zeigen Sie:

- (a) Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{B}_{s+t} = \mathcal{B}_s \mathcal{B}_t$ .
- (b) Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{B}_t : H_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow H_p^{s+t}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ein isometrischer Isomorphismus.
- (c) Für jedes  $t \geq 0$  ist die Einbettung  $H_p^{s+t}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \hookrightarrow H_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  stetig.
- (d) Die Einbettungen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \hookrightarrow H_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  sind stetig.