Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 10

Vorrechnen in der Übung am 10.1.2019

Aufgabe 1:

Seien A, B Typen und $f : A \to B$. Für $b : B$ definieren wir die „Faser von f über b“ durch $\mathrm{fib}_f(b) :\equiv \sum_{a:A} f(a) =_B b$. (Im mengentheoretischen Modell ist $\mathrm{fib}_f(b)$ genau das Urbild von b unter f.)

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{isequiv}(f) \leftrightarrow \forall(b : B)\ \mathrm{iscontr}(\mathrm{fib}_f(b))$.

(b) Wir betrachten nun ein Beispiel dafür im topologischen Modell: Sei $A = [0, 1)(\subset \mathbb{R})$, sei $B = S^1(\subset \mathbb{C})$ und $f(a) = e^{a \cdot 2\pi i}$.
Dieses f ist keine Homotopieäquivalenz, aber es ist bijektiv, also ist insbesondere $f^{-1}(b)$ zusammenziehbar für jedes $b \in B$.
Wieso ist das kein Widerspruch? Genauer: Wie sieht $\mathrm{fib}_f(b)$ in diesem Beispiel aus?

Aufgabe 2:

Für die Beweise in dieser Aufgabe wird das Univalenzaxiom benötigt.

(a) Sei $\mathbb{2} = \mathbb{1} + \mathbb{1}$. Zeigen Sie:
Es exitiert ein $p : \mathbb{2} =_{\mathcal{U}} \mathbb{2}$ mit $p \neq_{\mathcal{U}} \mathrm{refl}_{\mathbb{2}}$.
(Hierbei ist $a \neq_A b$ definiert als $\neg a =_A b$.)
Hinweis: Irgendwo in ihrem Beweis wird wahrscheinlich Blatt 5, Aufgabe 1 (b) nützlich sein.

(b) Für jeden Typ A gilt: $A \to \mathrm{iscontr}(\neg\neg A)$.
Hinweis/Anmerkung: Sie dürfen hier Funktionsextensionalität benutzen, also $f \sim g \to f = g$, für $f, g : A \to B$.