Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 11

Vorrechnen in der Übung am 17.1.2019

Aufgabe 1:

In der Vorlesung wurde behauptet:

Lemma 2.4.8: Sei $A : \mathcal{U}$ kontrahierbar mit Zentrum a, d. h. $\forall (a' : A)\, a' =_A a$. Sei außerdem $B : A \to \mathcal{U}$ gegeben. Dann ist $(\sum_{x:A} B(x)) \simeq B(a)$.

Zeigen Sie dies.

Aufgabe 2:

In der Vorlesung wurde behauptet:

Prop. 2.4.3: Sei folgendes gegeben: $A : \mathcal{U}$, $B, C : A \to \mathcal{U}$, $f\colon (a : A) \to B(a) \to C(a)$. Sei $g\colon \sum_{a:A} B(a) \to \sum_{a:A} C(a)$ definiert durch $g(a,b) = (a, f(a,b))$. Dann gilt: $\mathrm{isequiv}(g) \iff \forall (a : A)\ \mathrm{isequiv}(f(a))$

Diese Proposition soll bewiesen werden.

Als Zutaten wird empfohlen:

- Lemma 2.4.8 (siehe Aufgabe 1)
- Aufgabe 1 (a) von Blatt 11, d. h.:
  Lemma 2.4.7: Sei folgendes gegeben: $A, B : \mathcal{U}$, $f\colon A \to B$. Dann gilt $\mathrm{isequiv}(f) \leftrightarrow \forall (b : B)\ \mathrm{iscontr}(\mathrm{fib}_f(b))$, wobei $\mathrm{fib}_f(b) :\equiv \sum_{a:A} f(a) =_B b$

Hinweis: Geben Sie an, wie $\mathrm{fib}_g((a,c))$ aussieht und vereinfachen Sie dies (bis auf Homotopie) mit Lemma 2.4.8. Sie sollten auf die Art zeigen können, dass $\mathrm{fib}_g((a,c)) \simeq \mathrm{fib}_{f(a)}(c)$ gilt.