Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 13

Vorrechnen in der Übung am 31.1.2019

Für alle, die schon viele Punkte haben, ist dieses Blatt freiwillig.

Aufgabe 1:

Seien $A : \mathcal{U}$, $B, C : A \to \mathcal{U}$, $a, a' : A$ und $p : a = a'$ gegeben. Sei außerdem $F(x) :\equiv B(x) \to C(x)$.

Zeigen Sie: Für alle $f : F(a)$ gilt $\mathrm{transport}^F(p)(f) \circ \mathrm{transport}^B(p) = \mathrm{transport}^C(p) \circ f$.

Hinweis: Verwenden Sie Pfadinduktion.

Aufgabe 2:

(a) Wie kann man in unserem Kalkül ausdrücken, dass ein Typ A (als topologischer Raum) zusammenhängend ist? Also genauer: Geben Sie eine Funktion isconn an, so dass im topologischen Modell $\mathrm{isconn}(A)$ genau dann gilt, wenn A als topologischer Raum zusammenhängend ist.
Hinweis: Pfade helfen nicht weiter, aber der Typ $\mathbb{2} \equiv \mathbb{1} + \mathbb{1}$ ist nützlich. (Welcher topologische Raum ist $\mathbb{2}$ im topologischen Modell?)

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{isconn}(S^1)$.

Aufgabe 3:

(a) Wir wollen das Einheitsintervall I durch geeignete Regeln als Typ einführen. Es soll folgende Eigenschaften haben: Es enthält Elemente 0_I und 1_I; es existiert ein Pfad „seg“ von 0_I nach 1_I; und eine Abbildung $f : (t : I) \to C(t)$ lässt sich dadurch definieren, dass man $f(0_I)$, $f(1_I)$ und das Bild $\mathrm{apd}(f)(\mathrm{seg})$ des Pfades angibt. Formulieren Sie dies als formale Regeln.

(b) Zeigen Sie, dass man aus diesen Regeln für I Funktionsextensionalität ableiten kann (ohne das Univalenz-Axiom zu verwenden).
Hinweis: Sind $f, g : A \to B$ mit $f \sim g$, so lässt sich daraus eine Abbildung $A \to I \to B$ konstruieren. Das liefert dann eine Abbildung $I \to A \to B$, und die wiederum kann benutzt werden, um $f = g$ zu folgern. (Dabei werden Sie möglicherweise eine selten benutzte Regel benötigen, nämlich, für $f : A \to B$: $f \equiv \lambda(x : A).f(x)$.)