Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 3

Vorrechnen in der Übung am 8.11.2019

Aufgabe 1:

Finden Sie Terme t_i, so dass sich die folgenden Urteile herleiten lassen:

(a) $A\boldsymbol{:}\,\boldsymbol{\mathcal{U}_0},B\boldsymbol{:}\,\boldsymbol{\mathcal{U}_0} \vdash t_1\boldsymbol{:}A\boldsymbol{\to}B\boldsymbol{\to}A$

(b) $A\boldsymbol{:}\,\boldsymbol{\mathcal{U}_0},B\boldsymbol{:}\,\boldsymbol{\mathcal{U}_0},C\boldsymbol{:}\,\boldsymbol{\mathcal{U}_0} \vdash t_2\boldsymbol{:}\,\boldsymbol{(}A\boldsymbol{\to}B\boldsymbol{\to}C\boldsymbol{)} \boldsymbol{\to} \boldsymbol{(}A\boldsymbol{\to}B\boldsymbol{)} \boldsymbol{\to}A\boldsymbol{\to}C$

(Beispiel: Bei „$A\boldsymbol{:}\,\boldsymbol{\mathcal{U}_0} \vdash t_0\boldsymbol{:}A\boldsymbol{\to}A$“ könnte man als t_0 die Identitätsfunktion nehmen, also $t_0 = \boldsymbol{\lambda(x\,:}A\boldsymbol{).x}$.)

(c) Was besagen die Aufgaben von Blatt 1 darüber? (Und was bedeutet der Modus Ponens von Blatt 1 in diesem Kontext?)

Aufgabe 2:

(a) Geben Sie eine Funktion id auf $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0$ an, die jedem Typ A die Identitätsfunktion auf A zuordnet. Geben Sie auch den Typ Ihrer Funktion id an und leiten Sie her, dass id den von Ihnen angegebenen Typ hat.

(b) Definieren Sie die n-fache Verknüpfung einer Funktion mit sich selbst. Genauer: Unter der Annahme, dass A ein Typ ist, geben Sie eine Funktion g von $(A \to A) \times \mathbb{N}$ nach $A \to A$ an, die (f, n) auf $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$ abbildet. (Genauer: Geben Sie einen Term für die Funktion g an.)
Leiten Sie für diesen Term g das Urteil $A\boldsymbol{:}\boldsymbol{\mathcal{U}}_0 \vdash g\boldsymbol{:(}A\boldsymbol{\to}A\boldsymbol{)} \boldsymbol{\to}\mathbb{N}\boldsymbol{\to}A\boldsymbol{\to}A$ her.

(c) Geben Sie einen Term h für die Funktion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto (a + b)$ an.
Hinweis: Das g aus (a) macht das viel leichter.