Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 5

Vorrechnen in der Übung am 15.11.2019

Aufgabe 1:

Seien A und B Typen. Beweisen Sie, dass „$A + B$ das ist, was man erwartet“, nämlich:

(a) Die Abbildungen $\mathrm{inl} : A \to A + B$ und $\mathrm{inr} : B \to A + B$ sind injektiv, also:
$\forall(a : A)\forall(a' : A)\,(\mathrm{inl}(a) =_{A+B} \mathrm{inl}(a') \to a =_A a')$, und analog für inr.

(b) inl und inr haben disjunkte Bilder, also:
$\forall(a : A)\forall(b : B)\,\neg(\mathrm{inl}(a) =_{A+B} \mathrm{inr}(b))$.

(c) Die Vereinigung der Bilder von inl und inr ist ganz $A + B$, also:
$\forall(x : (A + B))\ \ \exists(a : A)\, x =_{A+B} \mathrm{inl}(a) \quad \vee \quad \exists(b : B)\, x =_{A+B} \mathrm{inr}(b)$

Geben Sie so viele Details von Ihren Beweisen an, dass klar wird, wie man sie vollständig formal mit den in der Vorlesung eingeführten Schlussregeln formulieren kann.

Hier sind informelle Beweise der obigen Aussagen; Ziel ist also, diese Beweise zu formalisieren.

- Ist $a : A$ gegeben, so folgt aus der Eliminationsregel für $+$, dass man eine Relation R auf $A + B$ definieren kann, so dass $R(\mathrm{inl}(a'))$ genau dann gilt, wenn $a' = a$ ist, und so dass $R(\mathrm{inr}(b'))$ für kein b' gilt. Daraus folgen schon (a) und (b).
- Die Eliminationsregel für $+$ besagt insbesondere: Möchte man zeigen, dass eine Relation R auf $A + B$ für alle Elemente von $A+B$ gilt, so reicht es zu zeigen, dass R auf dem Bild von inl und auf dem Bild von inr gilt. Daraus folgt (c), indem man für R die Relation „liegt im Bild von inl oder inr“ nimmt.