Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 8

Vorrechnen in der Übung am 6.12.2019

Aufgabe 1:

Sei A ein Typ, $a, b : A$ und $p : a = b$. Zeigen Sie: $p \bullet p^{-1} =_{a =_A a} \mathrm{refl}_a$

Aufgabe 2:

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass alle Homotopiegruppen von $\mathbb{1}$ trivial sind. Wir gehen wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}$ zusammenhängend ist. Genauer: Zeigen Sie $\forall (x : \mathbb{1})\, \forall (y : \mathbb{1})\, x =_{\mathbb{1}} y$.
Geben Sie auch einen Term für einen Zeugen $p_{x,y} : x =_{\mathbb{1}} y$ an.
Hinweis: Um eine Behauptung für alle $x : \mathbb{1}$ zu zeigen reicht es (wie üblich), die Behauptung nur in bestimmten Fällen zu zeigen und dann Induktion (in diesem Fall $\mathrm{ind}_{\mathbb{1}}$) zu benutzen.

(b) Wir wollen nun zeigen, dass für alle $x, y : \mathbb{1}$ eine Homotopieäquivalenz $x =_{\mathbb{1}} y \simeq \mathbb{1}$ existiert. Geben Sie dazu ein $f : x =_{\mathbb{1}} y \to \mathbb{1}$ und ein $g : \mathbb{1} \to x =_{\mathbb{1}} y$ an und zeigen Sie, dass die Verknüfungen $f \circ g$ und $g \circ f$ homotopieäquivalent zur Identität sind, im folgenden Sinn:
$\forall (p : x =_{\mathbb{1}} y)\, g(f(p)) =_{x =_{\mathbb{1}} y} p$ und $\forall (x : \mathbb{1})\, f(g(x)) =_{\mathbb{1}} x$
Hinweis zur Definition von f: Nehmen Sie x und y nicht als gegeben an, sondern definieren Sie f als Funktion, die x, y und einen Pfad nimmt.
Hinweis zur Definition von g: Verwenden Sie $p_{x,y}$ aus (a).

(c) Wir definieren nun rekursiv, für $n \in \mathbb{N}$: $X_0 :\equiv \mathbb{1}$, $x_0 :\equiv \star$; und $X_{n+1} := x_n =_{X_n} x_n$, $x_{n+1} := \mathrm{refl}_{x_n}$.
Formulieren Sie diese Definition präzise in der Typtheorie und zeigen Sie dann:
$\forall (n : \mathbb{N})\, \forall (x, y : X_n)\, x =_{X_n} y$