Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 9

Vorrechnen in der Übung am 20.12.2019

Aufgabe 1:

Sei folgendes gegeben: $A, B : \mathcal{U}$, $C\colon A \to \mathcal{U}$, $f, f' : A \to B$, $a, a', a'' : A$, $p : a =_A a'$, $q : a' =_A a''$, $c : C(a)$.

Bestimmen Sie die fehlenden Indizes an den Gleichheitszeichen der folgenden Aussagen, beschreiben Sie die Aussagen anschaulich (im topologischen Modell), und zeigen Sie sie:

(a) $\mathrm{ap}_f(p \bullet q) = \mathrm{ap}_f(p) \bullet \mathrm{ap}_f(q)$

(b) $\mathrm{transport}^C(q, \mathrm{transport}^C(p, c)) = \mathrm{transport}^C(p \bullet q, c)$

(c) Ist $C(x) \equiv B$ für alle $x : A$ (also $C :\equiv \lambda(x : A).B$), so ist $\mathrm{transport}^C(p)(c) =_B c$.

(d) $\forall (H\colon f \sim f')\, H(a) \bullet \mathrm{ap}_g(p) = \mathrm{ap}_f(p) \bullet H(a')$

Aufgabe 2:

Seien $A_1, A_2 : \mathcal{U}$. In dieser Aufgabe wollen wir $A_1 \times A_2$ topologisch untersuchen.

Zur Erinnerung: Wir hatten $A_1 \times A_2$ definiert als $\sum_{x:A_1} A_2$. Das läuft darauf hinaus, dass die Elimination- und Computation-Regel für $A_1 \times A_2$ besagen: Zu jedem $C : (A_1 \times A_2) \to \mathcal{U}$ und jedem $g : (a_1 : A_1) \to (a_2 : A_2) \to C((a_1, a_2))$ erhalten wir ein $f = \mathrm{ind}_\times(g) : (b : A_1 \times A_2) \to C(b)$.

Wir hatten damit dann Abbildungen $\mathrm{pr}_i\colon A_1 \times A_2 \to A_i$ definiert durch $\mathrm{pr}_i((a_1, a_2)) \equiv a_i$.

Seien $a_i, a'_i : A_i$ für $i = 1, 2$.

(a) Zeigen Sie: $((a_1, a_2) =_{A_1 \times A_2} (a'_1, a'_2)) \leftrightarrow ((a_1 =_{A_1} a'_1) \times (a_2 =_{A_2} a'_2))$.
(Geben Sie also Abbildungen in beide Richtungen an.)

(b) Zeigen Sie, dass sogar gilt: $((a_1, a_2) =_{A_1 \times A_2} (a'_1, a'_2)) \simeq ((a_1 =_{A_1} a'_1) \times (a_2 =_{A_2} a'_2))$.
(Sehr wahrscheinlich sind Ihre Abbildungen aus (a) die gesuchten Homotopieäquivalenzen.)