Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 2 \\ x - 3y + z \quad &= 0 \\ -3x + 2y - 7z &= 1 \end{aligned}$$

durch Auflösen nach den Variablen und Einsetzen in die noch nicht verwendeten Gleichungen.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei n eine positive natürliche Zahl und seien $a_1, \ldots, a_n$ (reelle) Zahlen. Welche der folgenden Aussagen besagen das Gleiche?

(i) Für alle natürlichen Zahlen i zwischen 1 und $n-1$ (inklusive) gilt $a_i \leq a_{i+1}$.

(ii) Für alle natürlichen Zahlen i und j zwischen 1 und n (inklusive) gilt $i < j$, falls $a_i \leq a_j$.

(iii) Die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sind der Größe nach sortiert, wobei die kleinste Zahl zuerst kommt.

Geben Sie bei den Aussagen, welche nicht das gleiche besagen, ein Beispiel von Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ an, sodass eine der Aussagen wahr und die andere falsch ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Wir betrachten die Zahlen $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 2$ und $a_5 = 1$ und setzen $b_0 = a_1$ und $b_{n+1} = a_{b_n}$ für alle natürlichen Zahlen n. Berechnen Sie b_5 und nutzen Sie diese Berechnung aus, um $b_{123456789}$ zu bestimmen.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sind $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_m)$ zwei Tupel von (reellen) Zahlen, so definieren wir deren Kästchensumme als

$$(a_1, \ldots, a_n) \boxplus (b_1, \ldots, b_m) := (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m).$$

Die Kästchensumme nimmt also zwei Tupel und macht aus diesen ein neues Tupel, so wie auch die Addition zweier Zahlen wieder eine Zahl liefert. Nun können wir uns fragen, welche Eigenschaften die Kästchensumme hat.

(i) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(a_1, \ldots, a_n) \boxplus (b_1, \ldots, b_m) = (b_1, \ldots, b_m) \boxplus (a_1, \ldots, a_n)$ im Allgemeinen nicht stimmt, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

bitte wenden/scrollen

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 1

(ii) Gilt obige Gleichung wenigstens für manche Tupel? Können Sie ein Beispiel von zwei verschiedenen Tupeln angeben, sodass obige Gleichheit erfüllt ist?

(iii) Definieren Sie selber eine Verknüpfung $\boxtimes$, welche aus zwei Tupeln von Zahlen ein weiteres Tupel von Zahlen macht (wie die Kästchensumme). Sorgen Sie hierbei dafür, dass Ihre Verknüpfung im Allgemeinen von den Tupeln abhängt (also zB. nicht konstant ist). Untersuchen Sie anschließend ebenfalls analog zur letzten Aufgabe, in welchem Rahmen die Gleichung

$$(a_1, \dots, a_n) \boxtimes (b_1, \dots, b_m) = (b_1, \dots, b_m) \boxtimes (a_1, \dots, a_n)$$

für beliebige Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ und $(b_1, \dots, b_m)$ gilt.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 1

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären