

Lineare Algebra I, SoSe23 Blatt 10

Aufgabe 1 (5 Punkte): Gegeben seien die folgenden Matrizen mit komplexen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 3 & 1+i & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

- (i) Geben Sie an, welche der neun Matrixprodukte $AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC$ laut Vorlesung definiert sind.
- (ii) Berechnen Sie all die definierten Matrixprodukte des vorherigen Aufgabenteils.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- (i) $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (4x - 2y, 3x)$
- (ii) $f_2: V \rightarrow W, v \mapsto 0$, wobei der Körper K beliebig ist und V und W zwei K -Vektorräume sind.
- (iii) $f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ als Abbildung zwischen \mathbb{C} -Vektorräumen
- (iv) $f_4: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ als Abbildung zwischen \mathbb{R} -Vektorräumen
- (v) $f_5: \mathbb{R} \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x \mapsto (y \mapsto xy)$

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum und seien U und U' zwei Untervektorräume von V so, dass $\dim(U) + \dim(U') = \dim(V)$. Zeigen Sie, dass folgende drei Bedingungen äquivalent sind:

- (i) U' ist ein Komplement von U .
- (ii) $U \cap U' = \{0\}$.
- (iii) $U + U' = V$.

Lineare Algebra I, SoSe23 Blatt 10

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei $A \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Teilmenge, welche aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

besteht, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass A mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bildet.

Lineare Algebra I, SoSe23

Blatt 10

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären