Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 11

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Bestimmen Sie jeweils, ob es keine, eine oder mehrere lineare Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $f((3,-1)) = (0,2)$, $f((2,0)) = (1,1)$

(ii) f ist nicht injektiv und $f((3,-1)) = (1,0)$

(iii) f ist surjektiv und $f(\{(1,x) \mid x \in \mathbb{R}\})$ ist einelementig

(iv) $f(\{(x^2,x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}) = \{(1,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(v) $f((2,2)) = (2,0)$, $f((1,3)) = (1,1)$ und $f((-1,-7)) \neq (-1,-3)$

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei K ein Körper und seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Sei zudem $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Ist $\dim(V) < \dim(W)$, so ist f nicht surjektiv.

(ii) Ist $\dim(V) > \dim(W)$, so ist f nicht injektiv.

(iii) Ist $\dim(V) = \dim(W)$, so ist f injektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei zudem $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $(v_1,\dots,v_n) \in V^n$ linear unabhängig, so ist auch $(f(v_1),\dots,f(v_n)) \in W^n$ linear unabhängig.

(ii) Ist f zusätzlich injektiv und ist $(v_1,\dots,v_n) \in V^n$ linear unabhängig, so ist auch das Tupel $(f(v_1),\dots,f(v_n)) \in W^n$ linear unabhängig.

(iii) Ist $(v_1,\dots,v_n) \in V^n$ so, dass $(f(v_1),\dots,f(v_n)) \in W^n$ linear unabhängig ist, so ist auch $(v_1,\dots,v_n) \in V^n$ linear unabhängig.

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 11

(iv) Ist f ein Isomorphismus und ist $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ eine Basis, so ist auch das Tupel $(f(v_1), \dots, f(v_n)) \in W^n$ eine Basis.

(v) Ist $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ eine Basis so, dass $(f(v_1), \dots, f(v_n)) \in W^n$ eine Basis ist, so ist f bereits ein Isomorphismus.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass der Untervektorraum $\ker(f)$ ein Komplement des Untervektorraumes $\mathrm{im}(f)$ ist.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 11

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären