

Lineare Algebra I, SoSe23 Blatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei A die (mathematische) Aussage "Jede natürliche Zahl ist Summe dreier Quadratzahlen."

- (i) Formulieren Sie A rein unter Verwendung von Symbolen ($\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists, +, \cdot$, etc.) und Ihnen bereits bekannten Zahlmengen (d.h. definieren Sie sich keine neue Mengen für diese Aufgabe).
- (ii) Nutzen Sie den vorherigen Aufgabenteil, um die Negation von A zu bilden. Sorgen Sie dabei dafür, dass das Symbol " \neg " am Ende nicht mehr in Ihrer Lösung auftaucht.
- (iii) Ist A wahr? Zeigen oder widerlegen Sie A .

Bemerkung: Eine Quadratzahl ist eine natürliche Zahl, welche sich als Quadrat einer natürlichen Zahl schreiben lässt.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller natürlichen Zahlen n , für welche die folgenden Aussagen wahr sind:

- (i) $\exists a, b \in \mathbb{N}: ((n = 2a) \wedge (n = 2b + 1))$
- (ii) $\exists m \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}: (k > m \Rightarrow k > n)$
- (iii) $\neg \exists m \in \mathbb{N}: \frac{m}{2} + n \in \mathbb{N}$
- (iv) $(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n + 1) \leq 20) \vee (5 \leq 2n \leq 10)$
- (v) $\neg(((n \text{ ist Quadratzahl}) \wedge (n \text{ ist Primzahl})) \Rightarrow n \geq 17)$

Bemerkung: 1 ist keine Primzahl.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien X, Y und Z Mengen. Zeigen Sie:

- (i) $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$
- (ii) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$
- (iii) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

Lineare Algebra I, SoSe23

Blatt 3

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei M eine Menge und betrachten Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$. Finden Sie eine Verknüpfung S , welche aus zwei Elementen $X, Y \in \mathcal{P}(M)$ ein weiteres Element aus $\mathcal{P}(M)$ macht, welches wir mit $S(X, Y)$ bezeichnen, und dabei alle folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $S(S(X, Y), Z) = S(X, S(Y, Z))$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{P}(M)$.
- (ii) $S(X, \emptyset) = X = S(\emptyset, X)$ für alle $X \in \mathcal{P}(M)$.
- (iii) $S(X, X) = \emptyset$ für alle $X \in \mathcal{P}(M)$.
- (iv) $S(X, Y) = S(Y, X)$ für alle $X, Y \in \mathcal{P}(M)$.

Lineare Algebra I, SoSe23

Blatt 3

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären