Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 4

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Welche der folgenden f_i sind Abbildungen?

(i) $f_1 \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$

(ii) $f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, 2m \mapsto 2m$, wobei m eine ganze Zahl ist.

(iii) $f_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} m, & \text{falls } n = 2m \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \\ m, & \text{falls } n = 2m+1 \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \end{cases}$

(iv) $f_4 \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b} \mapsto ab$

(v) $f_5 \colon \mathbb{N} \to \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), n \mapsto (m \mapsto nm)$

Bemerkung: Häufig wird auch folgende Sprechweise verwendet: Versucht man eine Abbildung zu definieren, so sagt man, dass diese *wohldefiniert* ist, falls Sie wirklich die definierende Eigenschaft einer Abbildung erfüllt. In dieser Sprechweise würden wir hier also danach fragen, ob die Abbildungen in (i)-(v) wohldefiniert sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{\heartsuit\},\ m \mapsto \begin{cases} 2m+1 & \text{falls } m > 0 \\ \heartsuit & \text{falls } m = 0 \\ -(2m-1) & \text{falls } m < 0. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{Z})$ der Abbildung f. Ist f surjektiv?

(ii) Berechnen Sie die Kardinalität der Urbilder $f^{-1}(n)$ für beliebige Elemente $n \in f(\mathbb{Z})$. Ist f aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $f(\mathbb{Z})$ injektiv?

(iii) Geben Sie eine Teilmenge $M \subset \mathbb{Z}$ an, sodass $f|_M : M \to f(\mathbb{Z})$ bijektiv wird.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Wir setzen $a_n = \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und betrachten $\underline{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(i) Für welche Mengen $X, Y \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ ist $\underline{a} \in X^Y$?

bitte wenden/scrollen

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 4

(ii) Ist $\underline{a} \in \prod_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq n\}$?

(iii) Gibt es eine endliche Menge M, sodass $\underline{a} \in M^{\mathbb{N}}$ ist?

(iv) Gibt es endliche Mengen M_n, $n \in \mathbb{N}$, sodass $\underline{a} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ ist?

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Existieren endliche Mengen A, B und C zusammen mit

(i) einer injektiven Abbildung $f\colon A \to B$ und einer nicht-surjektiven Abbildung $g\colon B \to C$,

(ii) einer surjektiven Abbildung $f\colon A \to B$ und einer nicht-injektiven Abbildung $g\colon B \to C$,

(iii) einer nicht-injektiven Abbildung $f\colon A \to B$ und einer surjektiven Abbildung $g\colon B \to C$,

(iv) einer nicht-surjektiven Abbildung $f\colon A \to B$ und einer injektiven Abbildung $g\colon B \to C$,

sodass $g \circ f$ bijektiv ist?

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 4

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären