

Lineare Algebra I, SoSe23 Blatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

(i) $z_1 = \frac{1}{3-i}$

(ii) $z_2 = \frac{5i}{4+3i} - \frac{2i}{5}$

(iii) $z_3 = (1 + 2i)^4$

(iv) $z_4 = \frac{2+3i}{1-2i} + \frac{i}{3+i}$

(v) $z_5 = \frac{2-i^{99}}{5i} + \frac{4}{i^9}$

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Finden Sie für folgende Elemente aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ einen Repräsentanten aus der Menge $\{0, \dots, n-1\}$:

(i) $a_1 = \overline{-4^2 - 1}, n = 11$

(ii) $a_2 = \overline{5(2 \cdot 40 - 4)}, n = 42$

(iii) $a_3 = \overline{5^{-1} \cdot 6}, n = 7$

(iv) $a_4 = \overline{99^{99999999}}, n = 100$

(v) $a_5 = \overline{m^2 - 2mm' + m'^2}$ für m gerade und m' ungerade, $n = 2$

Aufgabe 3 (5 Punkte):

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass wenn $(G_1, \cdot_1, e), \dots, (G_n, \cdot_n, e_n)$ Gruppen sind, auch das Produkt $G_1 \times \dots \times G_n$ zusammen mit der komponentenweisen Verknüpfung

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \cdot_1 b_1, \dots, a_n \cdot_n b_n)$$

und dem Element $e = (e_1, \dots, e_n)$ eine Gruppe bildet. Untersuchen Sie, ob diese Aussage auch für Ringe und Körper stimmt.

Lineare Algebra I, SoSe23 Blatt 6

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) Sei (G, \cdot, e) eine Gruppe. Eine Teilmenge H von G ist genau dann eine Untergruppe, falls H nicht leer ist und $ab^{-1} \in H$ ist für alle $a, b \in H$.
- (ii) In jeder Gruppe (G, \cdot, e) gilt $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ für alle $a, b \in G$.
- (iii) Jeder Ring ist Unterring eines Körpers.
- (iv) Die Verknüpfung auf G/H aus Satz 2.2.5 ist auch für nicht-abelsche Gruppen wohldefiniert.
- (v) Für jede ganze Zahl m existiert eine Verknüpfung $+_m$ auf der Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} , sodass $(\mathbb{Z}, +_m, m)$ eine Gruppe bildet.

Lineare Algebra I, SoSe23 Blatt 6

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären