Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

# Lineare Algebra I, SoSe23
# Blatt 7

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte):**
Handelt es sich bei den folgenden Teilmengen um Untervektorräume?

(i) $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

(ii) $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

(iii) $U_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 7\} \subset \mathbb{R}[x]$

(iv) $U_4 = \{f \in \mathbb{C}[x] \mid \deg(f) \leq 2\} \cup \{0\} \subset \mathbb{C}[x]$

(v) $U_5 = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

**Aufgabe 2 (5 Punkte):**
Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen und definieren die Verknüpfungen

$$\circledast\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0},\ (v, w) \mapsto vw$$

und

$$\circledcirc\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0},\ (\lambda, v) \mapsto v^{\lambda}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}_{>0}, \circledast)$ zusammen mit $\circledcirc$ als Skalarmultiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):**
Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Das Polynom $x^2 + 3 \in \mathbb{R}[x]$ lässt sich als Produkt zweier Polynome $f, g \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(f) = 1 = \deg(g)$ schreiben.

(ii) Das Polynom $x^2 + 3 \in \mathbb{C}[x]$ lässt sich als Produkt zweier Polynome $f, g \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(f) = 1 = \deg(g)$ schreiben.

(iii) Es gibt genau drei nullstellenlose normierte Polynome $f \in \mathbb{F}_3[x]$ mit $\deg(f) = 2$.

(iv) Es gibt ein Polynom $f \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$ mit $\deg(f) = 2$ und 4 Nullstellen.

(v) Es existiert ein kommutativer Ring $R$ zusammen mit einem nullstellenlosen Polynom $f \in R[x]$ mit $\deg(f) = 1$.

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

# Lineare Algebra I, SoSe23
# Blatt 7

---

**Aufgabe 4 (5 Punkte):**
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Sind $v, w \in V \setminus \{0\}$ mit $v \in \langle w \rangle_K$, so gilt auch $w \in \langle v \rangle_K$.

(ii) Sind $A$ und $B$ Teilmengen von $V$ mit $A \subseteq \langle B \rangle_K$, so gilt $\langle A \rangle_K \subseteq \langle B \rangle_K$.

(iii) Für alle Teilmengen $A$ und $B$ von $V$ gilt $\langle A \cap B \rangle_K = \langle A \rangle_K \cap \langle B \rangle_K$.

(iv) Sind $A$ und $B$ Teilmengen mit $\langle A \cup B \rangle_K = \langle A \rangle_K \cup \langle B \rangle_K$, so gilt $\langle A \rangle_K \subseteq \langle B \rangle_K$ oder $\langle B \rangle_K \subseteq \langle A \rangle_K$.

(v) Jeder Untervektorraum $U$ von $V$ ist Span einer Teilmenge $A \subseteq V$.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

# Lineare Algebra I, SoSe23
# Blatt 7

---

**Einige generelle Tipps:**

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären