

Lineare Algebra I, SoSe23 Blatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Wir betrachten die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

- (i) Zeigen Sie, dass das Tupel $(v_1, v_2, v_3) \in (\mathbb{R}^4)^3$ linear unabhängig ist.
- (ii) Finden Sie einen Vektor $v_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis von \mathbb{R}^4 ist.
- (iii) Schreiben Sie die Standardbasisvektoren $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{R}^4$ als Linearkombinationen Ihrer Basis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

- (i) Überprüfen Sie $((\bar{8}, \bar{2}, \bar{13}), (\bar{1}, \bar{6}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}, \bar{0})) \in (\mathbb{F}_5^3)^3$ auf lineare Unabhängigkeit.
- (ii) Für welche reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ist $(x^2+2x+1, 2x^2-x, ax^2-1) \in \mathbb{R}[x]^3$ linear unabhängig?
- (iii) Zeigen Sie, dass $((1, 1, 1), (x, y, z), (x^2, y^2, z^2)) \in (\mathbb{R}^3)^3$ für paarweise verschiedene reelle Zahlen x, y und z linear unabhängig ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei V ein K -Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) Ist $(v_1, v_2) \in V^2$ linear abhängig, so existiert $v \in V$ mit $v_1, v_2 \in \langle v \rangle$.
- (ii) Sind $(v_1, v_2) \in V^2$ und $(v_2, v_3) \in V^2$ linear abhängig, so auch (v_1, v_3) .
- (iii) Sind $(v_1, v_2) \in V^2$ und $(v_2, v_3) \in V^2$ linear abhängig, so auch (v_1, v_3) , falls $v_2 \neq 0$.
- (iv) Ist $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ linear unabhängig, so bildet es eine Basis von $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
- (v) Ist $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ linear abhängig, so ist bereits (v_1, \dots, v_{n-1}) linear unabhängig oder $v_n \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle_K$.

Lineare Algebra I, SoSe23

Blatt 8

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei p eine Primzahl und seien $v, w \in \mathbb{F}_p^3$ so, dass (v, w) linear unabhängig ist. Wie viele Vektoren $u \in \mathbb{F}_p^3$ gibt es, sodass (u, v, w) immernoch linear unabhängig ist?

Lineare Algebra I, SoSe23

Blatt 8

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären