Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2023
20.07.2023

Erste Klausur zur Linearen Algebra I

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet. Bitte lassen Sie dergleichen in Ihrer Tasche, und schalten Sie elektronische Geräte aus.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Wenn der Platz für die Lösung einer Aufgabe nicht ausreicht, können Sie auch auf dem leeren Papier am Ende des Klausurbogens weiterschreiben; machen Sie dann deutlich, was zu welcher Aufgabe gehört. (Sie können die Rückseiten und das leere Papier natürlich auch als Schmierpapier verwenden.)

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben).

Füllen Sie dieses Deckblatt erst auf Aufforderung aus.
Lassen Sie die Klausur bis dahin geschlossen liegen.

Wenn Sie zum Ausfüllen aufgefordert werden: Schreiben Sie bitte DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben.

Name: ________________________ Vorname: ________________________

Matrikel-Nr: ____________ Studienfach: ________________ Fachsemester: ______

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

- ☐ die Zulassung im SS 23 erworben habe
- ☐ (für Mathematiker inkl. Finanzmathematik:) an einer schriftlichen Prüfung zu lineare Algebra I bei

  ______________ im WS / SS ______ teilgenommen, aber nicht bestanden habe.
- ☐ (für andere Fächer:) die Zulassung zur Prüfung im WS / SS ______ erworben habe.

____
Unterschrift

Hiermit bestätige ich, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten die Menge $X = \mathrm{Abb}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ aller Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Relation $f \sim g \iff f(5) = g(5)$ auf der Menge X eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Wir ersetzen nun die definierende Eigenschaft $f(5) = g(5)$ von $\sim$ durch $f(5) = g(3)$. Welche der Axiome einer Äquivalenzrelation gelten dann noch?

(iii) Wir nehmen nun an, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist, für welche $f \sim g$ ist für alle $f, g \in X$ mit $f(5) = g(3)$. Zeigen Sie, dass die konstante Abbildung mit Wert 34 und die konstante Abbildung mit Wert 42 in Relation zueinander stehen.

Aufgabe 2 (2+3+2 Punkte):

Sei R ein (im Allgemeinen nicht-kommutativer) Ring. Wir nennen ein Element $a \in R$ idempotent, falls $a^2 = a$ ist.

(i) Sei $a \in R$ idempotent. Rechnen Sie nach, dass auch $b = 1-a$ idempotent ist und a und b miteinander kommutieren, d.h., dass $ab = ba$ ist.

(ii) Seien nun $a, b \in R$ so, dass a, b und $a + b$ idempotent sind. Zeigen Sie, dass a und b dann bereits miteinander kommutieren.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $ab = -ba$ ist. Was passiert nun, wenn man von links und/oder rechts mit a und/oder b multipliziert?

(iii) Sei nun $R = K[x]$ der Polynomring über einem Körper K in einer Variablen x. Zeigen Sie, dass die einzigen idempotenten Elemente von R durch 0 und 1 gegeben sind.

Aufgabe 3 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die drei Vektoren

$$v_1 = (1,2,1),\ v_2 = (-1,-1,1),\ v_3 = (2,2,-2) \in V.$$

(i) Ist $v_4 = (1,-1,-5) \in \langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}}$?

(ii) Welche der Vektoren v_1, v_2 oder v_3 kann man weglassen, ohne dass sich das Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}}$ ändert? Welche der Vektoren v_1, v_2 oder v_4 kann man bei dem Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_4\rangle_{\mathbb{R}}$ weglassen, ohne dass sich das Erzeugnis ändert?

(iii) Gibt es Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ so, dass $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist und außerdem $\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}}$, $\langle v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}}$ und $\langle v_1, v_3\rangle_{\mathbb{R}}$ alle drei echte Teilmengen von $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}}$ sind?

Aufgabe 4 (2+3+2 Punkte):

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die beiden Untervektorräume

$$U = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

(i) Bestimmen Sie die Dimension von $U \cap U'$.

(ii) Finden Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f((x, 2x, 3x)) = (2x, -2x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist und außerdem $f(v) = 2v$ für alle $v \in U'$ ist.

(iii) Sei nun $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $g(U') = U$. Welchen Rang kann g haben?

Aufgabe 5 (2+3+2 Punkte):

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -t & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Für welche Werte t ist die Matrix A_t invertierbar?

(iii) Bestimmen Sie das Inverse von A_1.